Serie 8

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

Lösung für Übung 1: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ ein Homöomorphismus. Wir wollen benutzen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ zwei Zusammenhangskomponenten hat. Es bezeichne A die unbeschränkte und B die beschränkte Zusammenhangskomponente (sodass B die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ ist). Weil f ein Homöomorphismus ist, werden die beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ von f entweder beibehalten oder vertauscht. Wenn $f(0,0) = (2,0)$ gilt, dann muss f die beiden Zusammenhangskomponenten A und B wegen $(0,0) \in B$ und $(2,0) \in A$ vertauschen. Insbesondere ist dann $f|_B\colon B \to A$ ein Homöomorphismus. Dies ist jedoch unmöglich, denn die Fundamentalgruppe von B ist trivial, während $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist, da S^1 ein Deformationsretrakt von A ist.

Übung 2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung

$$\psi_\beta\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\alpha] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta],$$

(vgl. Proposition 12.1 aus der Vorlesung vom 11. April) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.

(b) Sei Y ein topologischer Raum, $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ aussagen?

Lösung für Übung 2:

(a) Es gilt $\psi_\beta([\alpha]) = [(\beta^{-1}\alpha)\beta)] = [\beta^{-1}][\alpha][\beta] = [\beta]^{-1}[\alpha][\beta]$, also entspricht ψ_β der Konjugation mit $[\beta]$.

(b) Die Homotopie zwischen f und g gibt uns einen Weg β von $f(x_0) = y_0$ nach $g(x_0) = y_0$, also eine Schleife an y_0, mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ (Proposition 12.2 der Vorlesung, S.40). Wegen Teilaufgabe (a) gilt dann also $f_*(a) = [\beta]g_*(a)[\beta]^{-1}$ für alle $a \in \pi_1(X, x_0)$.

Übung 3.($\star$) Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leqslant r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Lösung für Übung 3: Wir nehmen an, dass f nicht surjektiv ist, und betrachten die induzierte Abbildung $\overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, wobei ohne Einschränkung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt sei, der unter f kein Urbild hat. Wir betrachten nun den induzierten Gruppenhomomorphismus $\overline{f}_*\colon \pi_1(\mathbb{R}^2, (2r, 0)) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(2r, 0))$ und die Schleife

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ & [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ & t \quad\ \mapsto (2r\cos(2\pi t), 2r\sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass für alle $t \in [0,1]$ die Strecke zwischen den Punkten $f(\alpha(t))$ und

$$(|f(2r,0)|\cos(2\pi t), |f(2r,0)|\sin(2\pi t))$$

nicht durch den Ursprung verläuft. Also ist $\overline{f} \circ \alpha$ via der linearen Homotopie homotop rel $\{0,1\}$ zur Schleife an $f(2r,0)$, die den Kreis vom Radius $|f(2r,0)|$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Somit gilt

$$\overline{f}_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(2r,0)).$$

Dies steht wegen $\pi_1(\mathbb{R}^2, (2r,0)) \cong \{1\}$ (da $\mathbb{R}^2$ kontrahierbar ist) im Widerspruch dazu, dass $\overline{f}_*$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Übung 4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

Lösung für Übung 4: Wir nehmen zunächst an, dass X einfach zusammenhängend ist. Seien $x, y \in X$ zwei Punkte und α, β zwei Wege von x nach y. Nach Voraussetzung gilt $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \cong \{1\}$ und daher $\beta^{-1}\beta \simeq \mathrm{const}_y$ rel $\{0, 1\}$ und $\alpha\beta^{-1} \simeq \mathrm{const}_x$ rel $\{0, 1\}$. Daraus folgt

$$\alpha \simeq \alpha\,\mathrm{const}_y \simeq \alpha(\beta^{-1}\beta) \simeq (\alpha\beta^{-1})\beta \simeq \mathrm{const}_x\,\beta \simeq \beta$$

rel Endpunkte. Da α und β beliebig waren, gibt es also eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach y.

Umgekehrt nehmen wir an, dass es für alle $x, y \in X$ eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach x. Also sind alle Schleifen an x homotop rel Endpunkte und es gilt $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Übung 5. ($\star$) Sei $(G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist[1].

Lösung für Übung 5: Seien $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$ und bezeichne $\bullet\colon G \times G \to G$ die Multiplikation der Gruppe. Wir schreiben auch $\bullet$ für die punktweise Multiplikation von Wegen. Diese erhält Stetigkeit. Dann gilt

$$(\alpha\,\mathrm{const}_e) \bullet (\mathrm{const}_e\,\beta) = (\alpha \bullet \mathrm{const}_e)(\mathrm{const}_e \bullet \beta) = \alpha\beta$$

und $(\alpha\,\mathrm{const}_e) \bullet (\mathrm{const}_e\,\beta) \simeq_{\{0,1\}} \alpha \bullet \beta$. Andererseits gilt auch

$$\alpha \bullet \beta \simeq_{\{0,1\}} (\mathrm{const}_e\,\alpha) \bullet (\beta\,\mathrm{const}_e) = \beta\alpha,$$

also folgt $\alpha\beta \simeq \alpha \bullet \beta \simeq \beta\alpha$ und damit die Behauptung.

Übung 6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

Lösung für Übung 6: Wir zeigen zuerst, dass X wegzusammenhängend ist.

Lemma 1. *Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum, dann ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Da X kontrahierbar ist, finden wir $H\colon X \times [0, 1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und der konstanten Abbildung, d.h. $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$, und einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$. Sind also $y, z \in X$ gegeben, so gibt es einen Weg von y nach z, nämlich $\gamma\colon [0, 1] \to X$,

$$\gamma(s) := \begin{cases} H(y, 2s) & \text{falls } s \in [0, 1/2] \\ H(z, 2 - 2s) & \text{falls } s \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

$\square$

Wir zeigen jetzt, dass $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$. Sei $\gamma\colon [0, 1] \to X$ eine Schleife an x_0, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Die Abbildung $F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$,

$$F(s, t) := H(\gamma(s), t),$$

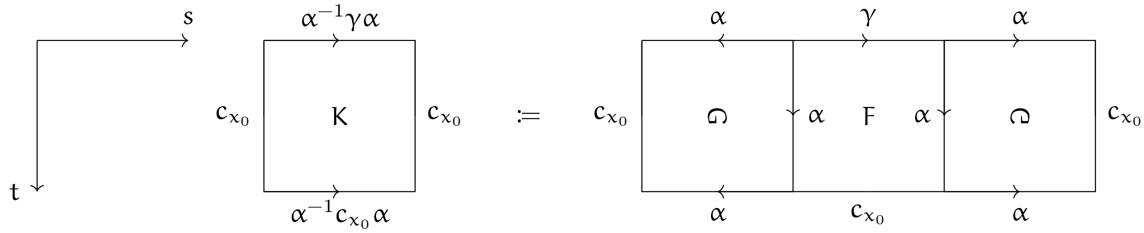
erfüllt $F(s, 0) = \gamma(s)$, $F(s, 1) = x_0$.

Wir bemerken, dass die Abbildung $\alpha\colon [0, 1] \to X$, die als $\alpha(t) := F(0, t) = H(x_0, t)$ definiert ist, ein Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ist. Insbesondere definiert α ein Element von $\pi_1(X, x_0)$.

Wir denken über die Homotopie $G\colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$, $G(s, t) := H(\alpha(s), t)$ nach und wir definieren die Abbildung $K\colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ als (siehe Abbildung unten, wir schreiben c_{x_0} für const_{x_0})

$$K(s, t) = \begin{cases} G(t, 1 - 3s) & \text{falls } s \in [0, 1/3] \\ F(3s - 1, t) & \text{falls } s \in [1/3, 2/3] \\ G(t, 3s - 2) & \text{falls } s \in [2/3, 1]\,. \end{cases}$$

[1] Schreiben Sie die Verkettung $\alpha\beta$ zweier Schleifen α, β als die punktweise Multiplikation (=Gruppenoperation) zweier gut gewählter Schleifen.



Man kann zeigen, dass K stetig ist, dass $K(\cdot, 0) = \alpha^{-1}\gamma\alpha$, $K(\cdot, 1) = \alpha^{-1}c_{x_0}\alpha$ und dass $K(0,t) = K(1,t) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$. (Hier schreiben wir $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ für die Verkettung der drei Wege σ_i, mit einem Drittel des Intervalls für jeden Weg; dies ist homotop rel Endpunkte zu $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$ und $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$). Die Abbildung K ist eine Homotopie zwischen $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ und $\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha$. Es folgt, dass

$$[\alpha^{-1}\gamma\alpha] = [\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha] \implies [\gamma] = [\alpha][\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha][\alpha^{-1}] = [c_{x_0}]$$

Das heisst $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\} = \{1\}$.

Übung 7. Ein **Gruppoid** ist eine kleine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. (Zur Erinnerung: eine Kategorie ist *klein*, wenn ihre Objekte eine Menge bilden, vgl. Serie 7, Übung 5).

(a) Prüfen Sie, dass für alle Gruppoide G und alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(G)$ die Morphismenmenge $G(X,X)$ eine Gruppe bildet. Finden Sie eine 1:1 Korrespondenz zwischen Gruppen und Gruppoiden mit nur einem Objekt.

(b) Seien G ein Gruppoid und $X, Y \in \mathrm{Ob}(G)$, so dass ein $f \in G(X,Y)$ existiert. Zeigen Sie, dass $G(X,X)$ und $G(Y,Y)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Kategorie $\Pi_1(X)$, die als Objekte genau die Punkte in X hat (also $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$), und als Morphismenmenge $\Pi_1(x_0, x_1)$ die Wege von x_0 nach x_1 bis auf Homotopie rel Endpunkte. Zeigen Sie, dass $\Pi_1(X)$ ein Gruppoid ist (das sogenannte *Fundamentalgruppoid*).

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \Pi_1\colon \mathbf{Top} &\to \text{Kategorie der Gruppoide} \\ X &\mapsto \Pi_1(X). \end{aligned}$$

ein Funktor ist. (Die Kategorie der Gruppoide ist ähnlich wie in Serie 7, Übung 5 definiert).

(e) Wie können Sie $\pi_1(X, x_0)$ mit Hilfe von $\Pi_1(X)$ beschreiben?

Lösung für Übung 7:

(a) Wir wollen zeigen, dass $(G(X,X), \circ)$ eine Gruppe ist. Der Morphismus $1_X \in G(X,X)$ ist das neutrale Element. Die Definition von Kategorie impliziert auch, dass die Komposition $\circ$ assoziativ ist. Und für alle $f \in G(X,X)$, gibt es Inverse $f^{-1} \in G(X,X)$, da f eine Isomorphismus ist.

Die gesuchte 1:1 Korrespondenz schickt nun ein Gruppoid G mit nur einem Objekt X auf die Gruppe $G(X,X)$, und umgekehrt eine Gruppe H auf das Gruppoid mit einem Objekt X, und Morphismenmenge von X nach X gegeben durch H.

(b) Man sieht, dass

$$\begin{aligned} C_f\colon G(X,X) &\to G(Y,Y) \\ g &\to fgf^{-1} \end{aligned}$$

eine Isomorphismus zwischen beiden Gruppen ist. Sein Inverses ist $C_{f^{-1}}$.

(c) Sei $([\gamma],[\gamma']) \in \Pi_1(X)(x_0,x_1) \times \Pi_1(X)(x_1,x_2)$. Die Komposition der Homotopieklasse der Wege γ und γ' ist die Homotopielasse $[\gamma] \circ [\gamma'] = [\gamma\gamma'] \in \Pi_1(X)(x_0,x_2)$. Es wurde in der Vorlesung bewiesen, dass $\circ$ assoziativ ist. Die Homotopieklassen der konstanten Wege fungieren als 1-Morphismen. Das heisst, dass $\Pi_1(X)$ eine Kategorie ist. Ausserdem gilt für alle Wege γ von x_0 nach x_1, dass $[\gamma] \circ [\gamma^{-1}] = [\gamma\gamma^{-1}] = [\mathrm{const}_{x_0}]$. Es folgt, dass $[\gamma] \in \Pi_1(X)(x_0,x_1)$ ein Isomorphismus ist.

(d) Wir müssen noch Π_1 für Abbildungen definieren. Seien $X, Y \in \mathbf{Top}$ zwei topologische Räume und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus $f \in \mathbf{Top}(X,Y)$, d.h eine stetige Abbildung von X nach Y. Nun sei $\Pi_1(f)$ der Funktor

$$\begin{aligned} \Pi_1(f)\colon \Pi_1(X) &\to \Pi_1(Y) \\ x_0 &\mapsto f(x_0) \\ [\gamma] \in \Pi_1(X)(x_0,x_1) &\mapsto [f \circ \gamma] \in \Pi_1(Y)(f(x_0), f(x_1)). \end{aligned}$$

Man prüft zuerst, dass $\Pi_1(f)$ tatsächlich ein Funktor zwischen den Gruppoiden $\Pi_1(X)$ und $\Pi_1(Y)$ ist, also dass $\Pi_1(f)([\mathrm{const}_{x_0}]) = [\mathrm{const}_{f(x_0)}]$ und $\Pi_1(f)([\gamma] \circ [\gamma']) = \Pi_1(f)([\gamma]) \circ \Pi_1(f)([\gamma'])$. Danach prüft man, dass Π_1 tatsächlich ein Funktor von **Top** nach der Kategorie der Gruppoide ist, also dass $\Pi_1(\mathrm{id}_X)$ der Identitätsfunktor von $\Pi_1(X)$ ist, und $\Pi_1(f \circ g) = \Pi_1(f) \circ \Pi_1(g)$. All diese Eigenschaften folgen direkt aus den Definitionen.

(e) Es ist direkt zu sehen, dass $\pi_1(X,x_0) \cong \Pi_1(X)(x_0,x_0)$.

Rätsel: Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderrahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?
Lösung für Übung 8: Hinweis: Seien a und b die beiden Erzeuger von $\pi_1(X,(0,0))$ für $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$. Studieren Sie $aba^{-1}b^{-1}$.