Serie 9

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. ($\star$) In Serie 8, Übung 2 haben wir gesehen, dass für X, Y zwei topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ ein Weg β mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ existiert. Finden Sie Abbildungen f, g wie in Serie 8, Übung 2 (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt[1].

Lösung für Übung 1: Seien $X = S^1$ und $Y = S^1 \vee S^1$. Wir beschreiben Elemente in S^1 durch reelle Zahlen θ, mit denen $e^{2\pi i\theta} \in S^1$ gemeint ist. In Y beschreiben wir Elemente mit einem Paar (θ, i) für $\theta \in S^1$ und $i = 0, 1$. Die Punkte $(0, 0) = 0$ und $(0, 1)$ sind identifiziert in Y. Seien

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\to S^1 \vee S^1 \\ \theta &\mapsto (\theta, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g\colon S^1 &\to S^1 \vee S^1 \\ \theta &\mapsto \begin{cases} (-3\theta, 1) & \text{wenn } 0 \leqslant \theta \leqslant 1/3, \\ (3\theta, 0) & \text{wenn } 1/3 \leqslant \theta \leqslant 2/3, \\ (3\theta, 1) & \text{wenn } 2/3 \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann mit Hilfe des Verklebungslemmas zeigen, dass g stetig ist. Wir wissen auch, dass

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, (0,0) = (0,1)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

von den Wegen $\alpha\colon \theta \mapsto (\theta, 0)$ und $\beta\colon \theta \mapsto (\theta, 1)$ erzeugt ist. Man bemerkt, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht kommutativ ist! Sei $\gamma\colon \theta \mapsto \theta$ ein Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 0)$. Es ist klar, dass

$$f_*\colon [\gamma] \mapsto [\alpha], \quad g_*\colon [\gamma] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta].$$

Das heisst, dass $f_* \neq g_*$. Wir haben jedoch eine Homotopie zwischen f und g:

$$\begin{aligned} H\colon S^1 \times [0,1] &\to S^1 \vee S^1 \\ (\theta, t) &\mapsto \begin{cases} (-3\theta - t, 1) & \text{wenn } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1-t}{3}, \\ \left(\dfrac{3\theta - 1 + t}{1 + 2t}, 0\right) & \text{wenn } \frac{1-t}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{2+t}{3}, \\ (3\theta - t, 1) & \text{wenn } \frac{2+t}{3} \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $[0,1] \to S^1 \vee S^1, t \mapsto H(0, t) = (-t, 1)$ die Schleife $[\beta^{-1}]$ ist.

Übung 2. Seien H und K Gruppen.

(a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist.

(b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

Lösung für Übung 2:

[1] Die Homotopie H zwischen f und g muss y_0 bewegen.

(a) Wir betrachten ein reduziertes Wort w in $H * K$ und nehmen an, dass es endliche Ordnung n hat. Wenn w gerade Länge hat, dann muss w^n ebenfalls reduziert sein, und kann darum nur das triviale Wort sein, wenn w trivial war. Wenn w ungerade Länge hat, dann können wir Potenzen von w reduzieren und Induktion zeigt, dass w^n von der Form a^n sein muss für ein a in H oder K. So ein Element ist allerdings nur trivial, falls a und somit w trivial war.

(b) Die Inklusionen $H \to H \times K$ und $K \to H \times K$ induzieren einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon H * K \to H \times K$ mit $\varphi(h) = (h, 1)$ und $\varphi(k) = (1, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ (wegen der universellen Eigenschaft des freien Produkts $H * K$). Es gilt somit $\varphi(h * k) = (h, 1) \cdot (1, k) = (h, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ und φ ist somit surjektiv.

Übung 3. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wie in der Vorlesung die freie Gruppe mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$, d.h. das freie Produkt von n Kopien von $\mathbb{Z}$, wobei a_i die 1 in der i-ten Kopie bezeichnet. Sind $r_1, \dots, r_k \in G$, so schreiben wir

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

für die Faktorgruppe G/N, wobei N der Normalteiler von G ist, der von allen Konjugierten der $r_1, \dots, r_k$ erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen jeweils isomorph sind.

(a) $\langle x, y \mid x^6, x^{15}, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$.

(b) $\langle x, y \mid x^2, y^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(c) $\langle x, y \mid x^2y^3, x^3y^4 \rangle \cong \{1\}$.

(d) $\langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle \cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$.

<u>*Lösung für Übung 3:*</u> Der Einfachheit halber bezeichnen wir im folgenden mit x nicht nur das Element der freien Gruppe G, sondern auch die Nebenklasse $[x]$ in der Faktorgruppe G/N.

(a) Da $xyx^{-1}y^{-1} = 1$, wissen wir, dass $xy = yx$ in G/N. Es handelt sich also um eine abelsche Gruppe. Wir haben ausserdem, dass $\langle x^6, x^{15} \rangle = \langle x^3 \rangle$, weil $x^3 = x^{15}x^{-6}x^{-6}$ und $x^6 = x^3x^3$, $x^{15} = (x^3)^5$. Die Gruppe G/N ist dann

$$\mathbb{Z}^2/(x^3 = 0) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}.$$

(b) Bezeichne einen jeweiligen Erzeuger von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ mit a und b. Um einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G/N \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ zu definieren, genügt es, die Bilder von x und y festzulegen, sodas x^2 und y^3 auf 1 geschickt werden. Definieren wir also f durch $f(x) = a, f(y) = b$. Umgekehrt kann man (dank der universalen Eigenschaften des freien Produktes) $g\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to G/N$ durch Abbildungen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to G/N$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to G/N$ festlegen. Wählen wir also $g(a) = x, g(b) = y$. Dann sind f und g zueinander inverse Gruppenhomomorphismen.

(c) Wir haben, $x = x^3x^{-2} = y^{-4}y^3 = y$, also $1 = x^2y^3 = x^5$ und $1 = x^3y^4 = x^7$. Da $x = (x^7)^3(x^5)^{-4} = 1$, folgt $x = 1 = y$. Also ist G/N trivial.

(d) Seien $G_1/N_1 \coloneqq \langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle$ und $G_2/N_2 \coloneqq \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$. Ähnlich wie in (b) definieren wir jetzt zueinander inverse Gruppenhomomorphismen $\varphi_1\colon G_1/N_1 \to G_2/N_2$ und $\varphi_2\colon G_2/N_2 \to G_1/N_1$. Um φ_1 zu definieren, genügt es, die Bilder von x und y festzulegen; dies muss so geschehen, dass x^2y^{-3} auf 1 geschickt wird. Wir definieren

$$\varphi_1\colon \langle x, y \rangle \to G_2, x \mapsto bab, y \mapsto ab.$$

Wir haben wie benötigt $\varphi_1(x^2) = babbab = abab^{-1}a^{-1}b^{-1}babbab = ababab = \varphi_1(y^3)$. Wir definieren jetzt

$$\varphi_2\colon \langle a, b \rangle \mapsto G_1, b \mapsto xy^{-1}, a \mapsto y^2x^{-1}$$

Wiederum haben wir wie benötigt $\varphi_2(abab^{-1}a^{-1}b^{-1}) = y^2x^{-1}xy^{-1}y^2x^{-1}yx^{-1}xy^{-2}yx^{-1} = y^3x^{-2} = 1$. Es ist klar, dass φ_1 und φ_2 invers zueinander sind.

Übung 4. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Übung 4 von Serie 4).

Lösung für Übung 4: Wir verwenden die Definition $\mathbb{RP}^2 = D^2/\sim$, wobei $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ und $\sim$ erzeugt ist von $x \sim -x$ für alle $x \in D^2$ mit $\|x\| = 1$. Nun sind

$$U = \{[x] \mid x \in D^2, \|x\| < 2/3\},$$
$$V = \{[x] \mid x \in D^2, \|x\| > 1/3\}$$

und $U \cap V$ offen und wegzusammenhängend. Wähle $x_0 = [(1/2, 0)] \in U \cap V$. Da $U \cong B(0,1)$ zusammenziehbar ist, ist $\pi_1(U, x_0)$ trivial. Der Raum V hat als Deformationsretrakt $\{[x] \mid x \in D^2, \|x\| = 1\}$. Dieser Raum ist $S^1/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $x \sim -x$. Er ist zu S^1 homöomorph via $S^1/\sim \to S^1, [z] \mapsto z^2$. Somit ist $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von der Klasse der Schleife $\sigma_V \colon s \mapsto [e^{\pi i s}/2]$ (Achtung: nicht $e^{2\pi i s}$!). Auch $U \cap V$ hat als Deformationsretrakt $\{[x] \mid x \in D^2, \|x\| = 1/2\} \cong S^1$. Also ist $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt von der Klasse der Schleife $\sigma_{U\cap V} \colon s \mapsto [e^{2\pi i s}/2]$. Nach dem Satz von Seifert–van Kampen ist $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$ isomorph zu $\pi_1(V, x_0)/N$, wobei N erzeugt ist von Konjugierten von $\kappa_*^U([\sigma])\kappa_*^V([\sigma^{-1}])$. Da $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist, spielen die Konjugierten keine Rolle. Es genügt, den Erzeuger $[\sigma_{U\cap V}]$ zu betrachten. Wir haben $\kappa_*^U([\sigma_{U\cap V}]) = 1$ (da $\pi_1(U, x_0)$ trivial) und $\kappa_*^V([\sigma_{U\cap V}]) = 2[\sigma_V]$, nach der expliziten Beschreibung von $\sigma_{U\cap V}$ und σ_V. Unter dem Isomorphismus $\pi_1(V, x_0) \to \mathbb{Z}$ geht also N auf $2\mathbb{Z}$. Wir erhalten als Ergebnis $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Man erhält dieses Ergebnis auch als Spezialfall von Übung 6 (a), da $\mathbb{RP}^2$ aus S^1 durch Anheften einer 2-Zelle mit Verklebeabbildung $S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$ entsteht.

Übung 5. (Fundamentalgruppe von Graphen.) ($\star$) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Das heisst, dass V eine endliche Menge ist (die Menge der sogenannten Ecken) und $E \subseteq V \times V$ (die Menge der sogenannten Kanten). Wir ordnen G folgenden topologischen Raum X zu: versehe V und E mit der diskreten Topologie, und setze $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$, wobei $\sim$ erzeugt ist durch $v_i \sim ((v_0, v_1), i)$ für alle $(v_0, v_1) \in E$ und $i \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

Lösung für Übung 5: Es ist am einfachsten, auch Multigraphen zu erlauben, d.h. Graphen mit mehreren Kanten zwischen den gleichen Endpunkten. Formal kann man dies umsetzen, indem man als E eine Multimenge zulässt.

Sei $x_0 \in X$ und $C \subset X$ die Wegzusammenhangskomponente von x_0. Dann $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(C, x_0)$. Also betrachten wir nur den Fall, dass X wegzusammenhängend ist. Das ist dazu äquivalent, dass G zusammenhängend im Sinne der Graphentheorie ist.

Falls G nur eine einzige Ecke hat, so ist X homöomorph zum Wedge von $|E|$ Kreisen, und also ist dann $\pi_1(X, x_0)$ eine freie Gruppe mit $|E|$ Erzeugern. Falls G mehr als eine Ecke hat, so gibt es (da G zusammehängend ist) eine Kante (v, v') mit zwei verschiedenen Endpunkten $v \neq v'$. Betrachte den Graph G', bei dem diese beiden Endpunkte identifiert, und die Kante entfernt. Man sieht, dass der Raum X' dieses Graphen homotopieäquivalent zu X ist (X' entsteht durch das Zusammenschlagen der Kante zu einem Punkt), also eine isomorphe Fundamentalgruppe hat. Der Graph G' hat eine Ecke und eine Kante mehr als G. Also folgt per Induktion, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine freie Gruppe mit $|E| - |V| + 1$ Erzeugern ist.

Als alternative Lösung wählt man einen maximalen Baum B in G. Nun prüft man, dass durch das Zusammenschlagen von B in X zu einem Punkt ein homotopieäquivalenter Raum X' entsteht (das ist ähnlich, aber etwas komplizierter als die Homotopieäquivalenz in der ersten Lösung). Da G wegzusammenhängend ist, enthält B alle Ecken von G und B enthält $|V| - 1$ Kanten. Der Raum X' ist dann homöomorph zum Wedge-Produkt von $|E| - |V| + 1$ Kreisen. Das Resultat folgt.

Schliesslich ist auch eine Lösung direkt mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen möglich, indem man zeigt, dass das Hinzufügen einer Kante an bereits bestehende Ecken in der gleichen Wegzusammenhangskomponente die Fundamentalgruppe durch ein freies Produkt mit $\mathbb{Z}$ ändert.

Übung 6. ($\star$) Sei X ein topologischer Raum, $k \geqslant 1$, und $\varphi \colon S^{k-1} \to X$ stetig. Wir sagen, $X \cup_\varphi D^k$ entsteht aus X durch *Anheften einer* k*-Zelle*. Hier ist $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$. (Siehe Kap. 8, S. 23 in den Aufschriften für die Definition einer Anheftung $\cup_\varphi$).

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k = 2$.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k \geqslant 3$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen topologischen Raum X mit

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Lösung für Übung 6:

(a) Sei $\varphi\colon S^1 \to X$ eine stetige Funktion. Wir benutzen den Satz von Seifert und van Kampen. Wir zerlegen die 2-Zelle D^2 wie $D^2 = \widehat{D} \cup A$ mit

$$\widehat{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 2/3\} \text{ und } A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \in (1/3, 1]\}.$$

Sei nun

$$B = D \cap A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \in (1/3, 2/3)\}.$$

Wir können jetzt $X \cup_\varphi D^2$ als $(X \cup_\varphi A) \cup \widehat{D}$ schreiben. Seien $U = X \cup_\varphi A$, $V = \widehat{D}$ und $x_0 \in B$. Dann $U \cap V = B$ und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen im Satz von Seifert–van Kampen:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B, x_0) \arrow[r, "\kappa_*^V"] \arrow[d, "\kappa_*^U"'] & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \arrow[d] \\ \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \end{tikzcd}$$

Zuerst ist es klar, dass $\pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1$. Also ist $\kappa_*^V\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(\widehat{D}, x_0)$ die Nullabbildung. Wir sehen, dass B als Deformationsretrakt S^1 hat. Also ist $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$ von $\gamma\colon s \mapsto e^{is}/2$ erzeugt. Wir haben auch den Isomorphismus $i_*\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$, der von der Inklusion $i\colon B \hookrightarrow A$ induziert ist. Die Homotopie

$$\begin{aligned} F\colon A \times [0,1] &\to A \\ (x, t) &\mapsto x \cdot \|x\|^{-t} \end{aligned}$$

zeigt, dass A als Deformationsretrakt S^1 hat. Aus dem Verklebungslemma deduzieren wir einen Deformationsretrakt $\mathrm{Id} \cup_\varphi F\colon X \cup_\varphi A \times [0,1] \to X \cup_\varphi A$ von $X \cup_\varphi A$ zu X. Sei $\rho(\cdot) = F(\cdot, 1)$. Die Abbildungen

$$r_*\colon \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ und } i_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0)$$

sind invers zueinander (vgl. Serie 7, Übung 2 (b)). Doch gibt es $i_*\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0), [\gamma] \mapsto [\varphi]$ mit $[\varphi]$ die Klasse, die von φ erzeugt ist (legen wir x_0 auf $\varphi(1)$ und betrachten den Weg $s \mapsto \varphi(e^{2\pi i s})$). Unser kommutatives Diagramm hat also die Form

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B, x_0) \cong \langle [\gamma] \rangle \arrow[r, "\kappa_* \cong 1"] \arrow[d, "\kappa_*"'] & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1 \arrow[d] \\ \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \end{tikzcd}$$

Da $i_*\colon B \to \widehat{D}, [\gamma] \mapsto 0$, gilt

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N,$$

wobei N aus allen Konjugierten von $[\varphi]$ besteht.

Bemerkung 1. *Eine 2-Zelle anzukleben, tötet $\varphi\colon S^1 \to X$ in der Fundamentalgruppe. Genauer gesagt: φ bestimmt eine Konjugationsklasse in $\pi_1(X, x_0)$, die aus allen Elementen der Form $[\tau\sigma\tau^{-1}]$ besteht, wobei τ ein beliebiger Weg von x_0 nach $\varphi(1)$ ist, und σ der Weg $s \mapsto \varphi(e^{2\pi i s})$. Durch das Ankleben der 2-Zelle wird diese Konjugationsklasse herausgeteilt.*

(b) Sei $\varphi\colon S^{k-1} \to X$ eine stetige Funktion. Wir zerlegen wie in (a) die k-Zelle D^k wie $D^k = \widehat{D} \cup A$ mit

$$\widehat{D} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 2/3\} \text{ und } A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (1/3, 1]\}$$

und definieren wieder

$$B = D \cap A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (1/3, 2/3)\}.$$

Wir können jetzt $X \cup_\varphi D^k$ als $(X \cup_\varphi A) \cup \widehat{D}$ schreiben. Seien $U = X \cup_\varphi A$, $V = \widehat{D}$ und $x_0 \in B$. Dann $U \cap V = B$. Mann sehen, dass die Fundamentalgruppe von $\widehat{D}$, B und A trivial sind, weil diese topologische Räume jeweils einen Punkt, S^{k-1} und S^{k-1} als Deformationsretrakt haben. Das kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen im Satz von Seifert–van Kampen ist also

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(B, x_0) \cong 1 \arrow[r, "\kappa_*"] \arrow[d, "\kappa_*"'] & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1 \arrow[d] \\
\pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \arrow[r, "\iota_*^V"] & \pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0)
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $\iota_*^V\colon \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0)$ ein Isomorphismus ist. Da $X \cup_\varphi A$ auf X deformationsretrahiert, folgt $\pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Bemerkung 2. *Eine k-Zelle mit $k \geqslant 3$ ankleben, ändert die Fundamentalgruppe nicht.*

(c) Sei $X = S^1$, dann $\pi_1(X, 1) \cong \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle$ mit $\gamma\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z$. Sei $\varphi\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$. Wir haben, dass $[\varphi] = n[\gamma]$. Aus (a) haben wir

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^2) \cong {}^{\pi_1(X)}\!/\!_{\langle [\varphi] \rangle} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Wir finden auf diese Weise zwei topologische Räume Y und Z mit jeweiligen Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Das Wedge-Produkt $Y \vee Z$ von Y und Z hat Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.