



Serie 10

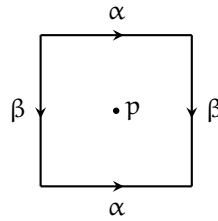
Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

Übung 1. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:

- (a) $\pi_1(T^2, x_0)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,
- (b) $\pi_1(K, x_0)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

Lösung für Übung 1:

- (a) We first determine the fundamental group of $T^2 \setminus \{p\}$ for any point $p \in T^2$. Let us represent the torus T^2 as a square with opposite sides identified, that is $Q/\sim$, where $Q := [-1, 1] \times [-1, 1]$ and $(x, -1) \sim (x, 1)$ for $x \in [-1, 1]$, $(-1, y) \sim (1, y)$ for $y \in [-1, 1]$ (see Figure (a)).



Moreover, we can assume that $p = (0, 0)$ is the center of the square. Observe that $Q \setminus \{p\}$ deformation retracts on the boundary of the square ∂Q , via the “linear” homotopy

$$H((x, y), t) = (1 - t)(x, y) + tb(x, y),$$

where $b(x, y) \in \partial Q$ is the unique intersection of ∂Q with the ray starting from p and going through (x, y) . As a result, the fundamental group of $(Q/\sim) \setminus \{p\}$ is the same as the fundamental group of $\partial Q/\sim$. However, observe that $\partial Q/\sim$ is homeomorphic to the wedge sum of two circles, hence we obtain that

$$\pi_1(T^2 \setminus \{p\}, x_0) = \pi_1(\partial Q/\sim, x_0) = \pi_1(S^1 \vee S^1) = \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

by the Seifert–van Kampen Theorem.

Now, let us use this to determine $\pi_1(T^2)$. To that end, consider the open cover of T^2 consisting of the open sets $A = (Q/\sim) \setminus \{(0, 0)\} \subseteq Q/\sim$ and $B = \text{int}(Q) = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq Q/\sim$. By the above discussion, the fundamental group of A is $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, whose generators are $a = [\alpha]$ and $b = [\beta]$, where $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow A$ are the curves $\alpha(t) := (-1 + 2t, -1) = (-1 + 2t, 1)$ and $\beta(t) := (-1, 1 - 2t) = (1, 1 - 2t)$ (see the above figure). On the other hand, B is contractible and thus has trivial fundamental group. Moreover note that $A \cap B = ((-1, 1) \times (-1, 1)) \setminus \{(0, 0)\}$ is homotopy equivalent to S^1 , hence it has fundamental group $\mathbb{Z}$ and a generator for $\pi_1(A \cap B)$ is the equivalence class of a curve homotopic to $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (i.e. a curve winding clockwise once around the origin).

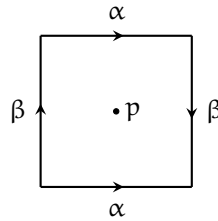
As a result, by the Seifert–van Kampen Theorem, we have that

$$\pi_1(T^2, x_0) = (\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)) / N = \pi_1(A, x_0) / N = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / N,$$

where N is the normal subgroup of $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ generated by $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Now, observing that $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / N$ is isomorphic to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, we conclude that $\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.



- (b) Similarly to what we did in the proof of the previous exercise (in fact the whole argument will be very similar), let us represent the Klein bottle K as a quotient of the square, that is $Q/\sim$, where $Q := [-1, 1] \times [-1, 1]$ and $(x, -1) \sim (x, 1)$ for $x \in [-1, 1]$, $(-1, y) \sim (1, -y)$ for $y \in [-1, 1]$ (see the figure below). Note that, differently from the torus, here the vertical sides are identified with opposite orientation.



Again, we first determine the fundamental group of $K \setminus \{p\}$, where p is any point $p \in K$. We can assume that $p = (0, 0)$ is the center of the square. Then, exactly the same homotopy as in part (a) shows that $(Q/\sim) \setminus \{p\}$ deformation retracts onto $\partial Q/\sim$, which is homeomorphic to the wedge sum of two circles (as before, even if the equivalent relation is different). Hence, by the Seifert–van Kampen Theorem, we obtain that

$$\pi_1(K \setminus \{p\}, x_0) = \pi_1(\partial Q/\sim, x_0) = \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Now, similarly as in part (a), we define $A = (Q/\sim) \setminus \{(0, 0)\}$, $B = \text{int}(Q)$ and the generators of $\pi_1(A, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ as $a = [\alpha]$ and $b = [\beta]$ represented by the curves $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow A$ given by $\alpha(t) := (-1 + 2t, -1) = (-1 + 2t, 1)$ and $\beta(t) := (1, 1 - 2t) = (-1, -1 + 2t)$ (note that now the quotient on the boundary of Q is different). Then, a generator for the fundamental group of $A \cap B$ is $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta$ and by the Seifert–van Kampen Theorem, we have that

$$\pi_1(K, x_0) = (\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)) /_N = \pi_1(A, x_0) /_N = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) /_N,$$

where N is the normal subgroup of $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ generated by $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta$.

This group is isomorphic to the semidirect product $\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, where the right copy of $\mathbb{Z}$ acts on the left copy of $\mathbb{Z}$ via $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\times} : n \mapsto (-1)^n$. In other words, it is the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ with multiplication $(x, y) \cdot (x', y') = (x + (-1)^y x', y + y')$. The isomorphism can be constructed as follows: the homomorphism $\varphi: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} : a \mapsto (0, 1), b \mapsto (1, 0)$ induces a well-defined homomorphism $\bar{\varphi}: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / N \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, because

$$\varphi(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta) = (0, 1) \cdot (1, 0) \cdot (0, -1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \cdot (1, 0) = (0, 0);$$

and it can be checked that $\bar{\varphi}$ is an isomorphism. This is typically called simply *the Klein bottle group*.

Übung 2. Sei $g \geq 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche Σ_g vom Geschlecht g* als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$ -seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g - 1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \dots, 4(g - 1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \dots, 4(g - 1) + 1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S + 2$ identifiziert.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$.

Lösung für Übung 2: Wie in Übung 1, Serie 10 benutzen wir den Satz von Seifert und van Kampen wie folgt: U ist das Polygon von Abbildung 1 ohne die Kanten, und V ist das Polygon ohne den Mittelpunkt. Dann haben wir $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U) \cong 0$ und $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$. Aber die Schleife γ , die $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt, kann man auch als $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ schreiben. Es gilt, dass

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\}.$$

Übung 3.(*)

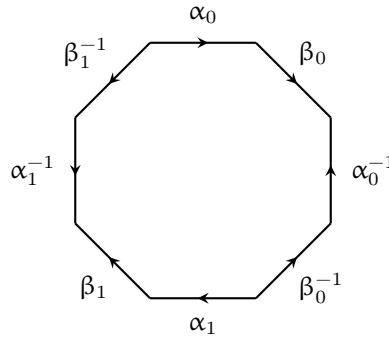


Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$ -seitigen Polygons im Fall $g = 2$.

- (a) Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) zwei punktierte topologische Räume, die kontrahierbare offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i besitzen für $i = 1, 2$. Finden Sie einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

- (b) Sei wie in der Vorlesung

$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \frac{1}{n})^2 + x_2^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

der Hawaiianische Ohrring. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung wie in (a)

$$\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \rightarrow \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$$

kein Isomorphismus ist.

Lösung für Übung 3:

- (a) Seien $U = X_1 \vee_{x_1=x_2} U_2$ und $V = X_2 \vee_{x_1=x_2} U_1$ zwei offene Teilmengen von $X_1 \vee X_2$. Da U_1 und U_2 kontrahierbare offene Umgebungen sind, haben wir, dass $U \cap V \cong U_1 \vee_{x_1=x_2} U_2$ kontrahierbar ist. Wir haben auch, dass $U = X_1 \vee_{x_1=x_2} U_2$ (bzw. $V = X_2 \vee_{x_1=x_2} U_1$) homotopieäquivalent zu X_1 (bzw. X_2) ist. Mit der Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen, ist die Abbildung $\iota_*^1 * \iota_*^2$, wobei $\iota_i: X_i \rightarrow X_1 \vee X_2$ die Inklusion bezeichnet, ein Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \rightarrow \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

- (b) Es bezeichnen wie in (a) ι^1 und ι^2 die beiden Inklusionen $H \rightarrow H \vee H$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow H \vee H$ die Schleife

$$\gamma(s) = \begin{cases} \iota^{k \bmod 2} (1/k + \cos(2^{k+2}\pi s)/k, \sin(2^{k+2}\pi s)/k) & \text{falls } s \in [2^{-k}, 2^{-k-1}] \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$

Man sieht, dass $[\gamma] \in \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$ nicht im Bild von $\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \rightarrow \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$ liegt.

Übung 4. Sei X die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Man betrachte die folgenden Topologien auf X : Produkttopologie; diskrete Topologie; indiskrete Topologie; von

$$B_{\varepsilon, f} = \{g \in X \mid \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ erzeugte Topologie; von

$$C_{\varepsilon, f, a, b} = \{g \in X \mid \forall x \in [a, b] : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ erzeugte Topologie.



- (a) Ordnen Sie dies Topologien nach Feinheit.
(b) Für jede dieser Topologien beschreibe man, was es für eine Folge $f_1, f_2, \dots \in X$ bedeutet, gegen $g \in X$ zu konvergieren.

Lösung für Übung 4:

- (a) Die diskrete Topologie ist immer die feinste Topologie und die indiskrete Topologie ist immer die grösste Topologie. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_1$ die Produkttopologie, und mit $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_3$ die Topologien, die jeweils von $B_{\varepsilon, f}$ und $C_{\varepsilon, f, a, b}$ für alle ε, f, a und b erzeugt sind. Wir beschreiben zuerst einen Basis für die Produkttopologie. Wir bemerken, dass

$$X = \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}.$$

Nämlich haben wir $(f(x))_{x \in \mathbb{R}} \in \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$. Die Produkttopologie ist von

$$D_{\varepsilon, f, I} := \{g \in X \mid \forall x \in I : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ und endliche Untermengen $I \subset \mathbb{R}$ erzeugt. Es ist jetzt klar, dass

$$D_{\varepsilon, f, I} = \bigcup_{[a, b] \supset I} C_{\varepsilon, f, a, b} \text{ und } C_{\varepsilon, f, a, b} = \bigcup_{f' \in F} B_{\varepsilon, f'},$$

wo $F = \{f' \in X, f'|_{[a, b]} = f\}$. Das heisst, dass $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_3$ feiner als $\mathcal{O}_1$ ist.

- (b) Für die diskrete und indiskrete Topologie ist es wie sonst.
- Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_2$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Dies nennt man gleichmässige Konvergenz, und entsprechend $\mathcal{O}_2$ die *Topologie der gleichmässigen Konvergenz*.
 - Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_3$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $a \leq b$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ und $x \in [a, b], |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Dies nennt man gleichmässige Konvergenz auf Kompakta, und entsprechend $\mathcal{O}_3$ die *Topologie der kompakten Konvergenz*. Auf $\mathbb{R}$ ist diese Konvergenz äquivalent zu *lokal gleichmässiger Konvergenz*.
 - Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_1$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt $|f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Dies ist die punktweise Konvergenz.

Übung 5. (★) Wir betrachten $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie. Wir haben in Serie 5, Übung 6 gesehen, dass

$$X := \{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$$

(also der Raum aller Funktionen von der Potenzmenge der natürlichen Zahlen nach $\{0, 1\}$, mit der Produkttopologie) kompakt ist, weil $\{0, 1\}$ kompakt ist. Zeigen Sie jedoch, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X ohne konvergente Teilfolgen gibt.

Lösung für Übung 5: Wir definieren eine Folge $(x_n)_n$ wie folgt, $x_n = (x_n^S)_{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ mit

$$x_n^S := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \in S \\ 0 & \text{wenn } n \notin S. \end{cases}$$

Damit eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n_k}$ gegen $y = (y^S)_{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} \in X$ in der Produkttopologie konvergiert, muss folgendes gelten: für alle $S \subset \mathbb{N}$ gibt es $N_S \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_k \geq N_S$ gilt $x_{n_k}^S = y^S$. Sei $S = \{n_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ dass $x_{n_{2k}}^S = 1$ und $x_{n_{2k+1}}^S = 0$. Deshalb gibt es für dieses S kein geeignetes N_S . (In anderen Worten: wir haben eine Koordinate gefunden, bei der die Teilfolge nicht konvergiert – also konvergiert die Teilfolge nicht punktweise). Also hat diese Folge keine konvergente Teilfolge.

Übung 6. (★★) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f: [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte“ wie z.B. die „Ecke“ $\{0\}_{n \in \mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten“ wie $\{\frac{1}{2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Lösung für Übung 6: