Serie 11

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Welche der Funktionenräume von Serie 10, Aufgabe 4 sind metrisierbar? In welcher dieser Funktionenräume ist die Menge der stetigen Funktionen abgeschlossen?

Lösung für Übung 1: Die diskrete Topologie ist immer metrisierbar, da $d(f,g) = \mathbb{1}_{f=g}$ eine Metrik ist, die die diskrete Topologie erzeugt. Für alle $a < b$ definieren wir $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dann kann man sehen, dass die Metriken

$$d_2(f,g) := \min\left(\|f-g\|_{(-\infty,+\infty)}, 1\right), \quad d_3(f,g) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min\left(\|f-g\|_{I_n}, 1\right)}{2^n},$$

für eine Folge $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ von Intervall mit $\bigcup I_n = \mathbb{R}$ die Topologie der gleichmässigen Konvergenz und der kompakten Konvergenz erzeugen.

Wir zeigen jetzt, dass die Produkttopologie nicht erstabzählbar ist. Dann folgt, dass keine Metrik existieren kann, die die Produkttopologie erzeugt. Eine Subbasis ist gegeben durch die Mengen

$$D_{\varepsilon,g,I} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid |f(x)-g(x)| < \varepsilon\ \forall x \in I\}$$

für alle $\varepsilon > 0$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $I \subset \mathbb{R}$ endlich. Angenommen, die offenen Umgebungen $D_{\varepsilon_n,g_n,I_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bilden eine Umgebungsbasis der Nullfunktion f. Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\bigcup I_n\right)$. Die offene Menge $D_{1,f,\{x\}}$ ist nicht in D_{ε_n,g,I_n} für irgendein n enthalten. Das bedeutet, dass die Menge aller Umgebungen D_{ε_n,g,I_n} kein Umgebungsbasis ist. Also ist die Topologie der punktweisen Konvergenz nicht metrisierbar.

Die indiskrete Topologie ist nicht Hausdorff, und damit nicht metrisierbar.

Sei die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{wenn } x \in [0,1] \\ 0 & \text{wenn } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Für alle n ist f_n stetig. Aber f_n konvergiert für die punktweise Konvergenz gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{wenn } x \in [1, +\infty)], \end{cases}$$

die nicht stetig ist. Eine abgeschlossene Menge ist auch folgenabgeschlossen.Es folgt, dass die Menge aller stetige Funktionen nicht abgeschlossen für die punktweise Konvergenz ist.

Man zeigt jetzt, dass wenn eine Folge f_n von stetigen Funktionen gegen $f \in X$ für die Topologie der kompakten Konvergenz konvergiert, dann ist f auch stetig. Da die Topologie der kompakten Konvergenz metrisierbar ist, impliziert dies, dass die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossen ist. Wir zeigen nun, dass f folgenstetig ist. Sei $(x_m)_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $I = [a,b]$ ein Intervall mit $x \in (a,b)$. Dass die Folge f_n gegen f konvergiert heisst, dass die Folge $\|f_n - f\|_I$ gegen 0 konvergiert. Man nimmt o.B.d.A. auch an, dass $x_m \in I$ für all m. Wir haben

$$|f(x_m) - f(x)| \leqslant |f(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

und für $n, m \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0. Das heisst, dass die Folge $(f(x_m))_m$ gegen $f(x)$ konvergiert. Also ist f auch stetig und die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossene für die kompakten Konvergenz.

Die Topologie der gleichmässigen Konvergenz ist feiner als die Topologie der kompakten Konvergenz, also gilt, dass die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossen ist.

Übung 2.

(a) Ein topologischer Raum X heisst *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: ist X metrisierbar und separabel, so ist X zweitabzählbar.

Lösung für Übung 2:

(a) Sei X ein topologischer Raum, der das das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ von X für eine abzählbare Menge I. Für alle $i \in I$ wählen wir ein $x_i \in B_i$ und definieren $A = \bigcup_{i\in I}\{x_i\}$. Die Menge A ist nach Konstruktion abzählbar und wir behaupten, dass $\overline{A} = X$ gilt. Angenommen, es gibt ein $x \in X \setminus \overline{A}$. Weil $\overline{A}$ abgeschlossen ist, ist $X \setminus \overline{A}$ offen. Also gibt es eine offene Menge U in X mit $x \in U \subseteq X\setminus\overline{A}$. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis von X ist, gibt es nun ein $i \in I$ mit $x \in B_i \subseteq U$. Für das zu Beginn ausgewählte Element $x_i \in B_i$ gilt nun aber $x_i \in A \subseteq \overline{A}$, also $x_i \in \overline{A}$, im Widerspruch zu $x_i \in B_i \subseteq U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Also gilt $\overline{A} = X$ wie behauptet.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine dichte Folge in X und d eine Metrik aus X, die die Topologie über X erzeugt. Wir wollen zeigen, dass die Menge $\{B_d(x_n, 2^{-m}) \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ eine Basis für die Topologie ist. Nämlich sei U eine offene Menge. Da die Folge (x_n) dicht ist, kann man eine $x_n \in U$ finden. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $B_d(x_n, 2^{-m}) \subset U$. Es folgt, dass X zweitabzählbar ist.

Übung 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nicht erstabzählbar ist. Hier ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der koabzählbaren Topologie, falls U leer ist oder höchstens abzählbares Komplement hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung von $\mathbb{R}$ mit koabzählbarer Topologie nach $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie, die x auf x schickt, folgenstetig ist, aber nicht stetig.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir wählen einen Punkt aus $\mathbb{R}$, sagen wir 0, und nehmen an, dass es eine abzählbare Umgebungsbasis $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von 0 gibt. Wir können annehmen, dass U_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von der Form $\mathbb{R} \setminus F_k$ für eine endliche Menge $F_k \subseteq \mathbb{R}$ ist. Dann ist $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen, also abzählbar. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ (in der Tat überabzählbar viele), der nicht in F enthalten ist. Somit ist $U = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ eine offene Menge, die wegen $x \in U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ keine der Mengen U_k enthält. Nun widerspricht dies wegen $0 \in U$ aber der Tatsache, dass $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0 ist.

(b) Der gleiche Beweis wie in (a) funktioniert, da auch eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

(c) Um zu zeigen, dass die Abbildung, die x auf x schickt, von $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nach $\mathbb{R}$ mit der natürlicher Topologie folgenstetig ist, müssen wir zeigen: Konvergiert eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ in der koabzählbaren Topologie, so konvergiert $(x_n)_n$ auch für die natürliche Topologie konvergiert gegen x. Nun ist $U = \left(\mathbb{R}\setminus\bigcup\{x_n\}\right) \cup \{x\}$ eine offene Menge in der koabzählbaren Topologie. Wenn x_n gegen x konvergiert, haben wir dann dass für alle genügend grossen $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U$. Es folgt, dass x_n konstant gleich x ist, für n gross genug. Also konvergiert $(x_n)_n$ auch für die natürliche Topologie gegen x.

Diese Abbildung ist aber nicht stetig, weil z.B. $(0,1)$ offen für die natürliche Topologie, aber nicht für die koabzählbare Topologie ist.

Übung 4. ($\star$) Sei X eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wie folgt beweise man, dass X homöomorph zu S^1 ist:

(a) Zeigen Sie, dass es eine endliche Überdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ durch offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}$ gibt.

(b) Man nehme im folgenden an, dass n minimal ist. Man zeige, dass $n \geqslant 2$.

(c) Zeigen Sie, dass ein $j \in \{2, \ldots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \varnothing$, $U_1 \setminus U_j \neq \varnothing$ und $U_j \setminus U_1 \neq \varnothing$ existiert.

(d) Sei o.B.d.A. $j = 2$. Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(Z)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ oder gleich (b, ∞) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ (Fall 1), oder gleich (b, ∞) (Fall 2), oder gleich $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ (Fall 3) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(e) In den ersten beiden Fälle aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls zu $\mathbb{R}$ homöomorph, was gegen die Minimalität von n verstösst.

(f) Im dritten Fall aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ zu S^1 homöomorph.

(g) Da S^1 kompakt ist, ist $U_1 \cup U_2 \subseteq X$ abgeschlossen; es folgt $n = 2$ und damit $X \cong S^1$.

Lösung für Übung 4:

(a) Für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x mit einem Homöomorphismus $\varphi_x \colon U_x \to \mathbb{R}$. Dann $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X ist kompakt, können wir eine endliche Teilüberdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ finden.

(b) Wäre n gleich 1 ist, hätten wir, dass $U_1 = X$ und X zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist. Aber $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch. Es folgt, dass $n \geqslant 2$.

(c) Wäre $U_1 \cap U_j$ leer für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so wäre

$$\bigcup_{j \geqslant 2} U_j \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_1^{-1}((-n, n))$$

eine Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Das widerspricht der Tatsache, dass X kompakt ist. Also gibt es $j \in \{2, \ldots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \emptyset$. Wäre $U_1 \setminus U_j$ die leere Menge, könnten wir $U_2 \cup \ldots \cup U_n$ als die Überdeckung von X nehmen. Dies wäre ein Widerspruch zur Minimalität von n. Aus dem gleichen Grund gilt es, dass die Menge $U_j \setminus U_1$ auch nicht leer ist.

(d) Zuerst bemerken wir, dass $U_1 \cap U_2$ und Z offene Mengen sind. Da Z zusammenhängend ist, folgt, dass $\varphi_1(Z)$ ein Intervall ist. Es folgt, dass $\varphi_1(Z) = (a, b)$. Da $U_1 \not\subset U_2$, ist es nicht möglich, dass $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass entweder $a = -\infty$ oder $b = \infty$ gilt. Wir nehmen also an, dass a und b beide nicht $\pm\infty$ sind, und leiten einen Widerspruch her. Es gilt $\varphi_2(Z) = (c, d)$. Nun ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ein Homöomorphismus $(a, b) \to (c, d)$. Ein solcher Homöomorphismus muss eine streng monoton fallende, oder eine streng monoton wachsende Funktion sein. Sei $(x_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $(\varphi_1(x_n))_n$ gegen a konvergiert. Es folgt, dass x_n gegen $\varphi_1^{-1}(a)$ konvergiert. Dann konvergiert $(\varphi_2(x_n))_n$ gegen c oder gegen d (wobei $c = -\infty$ bzw. $d = +\infty$) möglich ist. Betrachte den Fall, dass es gegen c konvergiert (der andere Fall verläuft analog). Falls $c \neq -\infty$, so folgt, dass x_n gegen $\varphi_2^{-1}(c)$ konvergiert. Aber nach Konstruktion ist $\varphi_1^{-1}(a) \neq \varphi_2^{-1}(c)$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass X Hausdorff ist (da dies die Eindeutigkeit von Grenzwerten impliziert). Also folgt $c = -\infty$ oder $d = +\infty$. Analog (durch Vertauschen der Rollen) folgt $a = -\infty$ oder $b = +\infty$.

Für eine weitere Zusammenhangskomponenten $Z' \subset U_1 \cap U_2$ gilt das gleiche. Man sieht, dass es keine dritte Zusammenhangskomponente geben kann. Es folgt, dass genau die drei in (d) genannten Fälle auftreten können.

(e) Betrachten wir den Fall $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (-\infty, b)$ und $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (c, \infty)$. Die anderen Fälle lassen sich ähnlich lösen. Seien $\psi_1 \colon (-\infty, \infty) \to (1, \infty)$ und $\psi_2 \colon (-\infty, c] \to (-\infty, 1]$ zwei streng monoton wachsende Homöomorphismen. Wir bauen einen Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \psi \colon U_1 \cup U_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \psi_1(\varphi_1(x)) & \text{wenn } x \in U_1, \\ \psi_2(\varphi_2(x)) & \text{wenn } x \in U_2 \setminus U_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Abbildung ψ ist stetig dank des Verklebungslemmas.

(f) Seien $V_1 = \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, x \geqslant -1/2\}$ und $V_2 = \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, x \leqslant 1/2\}$ zwei offenen Mengen. Mit Homöomorphismen $U_1 \cong V_1$ und $U_2 \cong V_2$ wie in (e) können wir einen Homöomorphismus zwischen $U_1 \cup U_2$ und $V_1 \cup V_2 = S^1$ bauen.

(g) Es folgt, dass $U_1 \cup U_2$ eine Zusammenhangskomponente von X ist. Das heisst, dass $X \cong U_1 \cup U_2 \cong S^1$.

Übung 5. Unter welchen Konstruktionen (wie z.B. Unterräume, feinere Topologie, abzählbare Produkte, ...) bleiben Erst- und Zweitabzählbarkeit jeweils erhalten?

Lösung für Übung 5:

Lemma 1. *Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ ein Unterraum von X. Wenn X erst- bzw. zweitabzählbar ist, ist Y auch erst- bzw. zweitabzählbar.*

Beweis. Für $x \in Y \subseteq X$ gibt es eine Umgebungsbasis $U_n \ni x$ für x in X. Dann ist $U_n \cap Y$ eine Umgebungsbasis für x in Y. Dies heisst, dass sich Erstabzählbarkeit an Unterräume vererbt. Für Zweitabzählbarkeit funktioniert der Beweis ähnlich. $\square$

Auf einer beliebigen Menge X sind sowohl die diskrete als auch die indiskrete Topologie erstabzählbar. Also bleibt Erstabzählbarkeit im Allgemeinen nicht darunter erhalten, dass man eine feinere oder gröbere Topologie betrachtet.

Auch Zweitabzählbarkeit vererbt sich i.A. weder an feinere noch an gröbere Topologien – finden Sie hierfür Beispiele?

Lemma 2. *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologischen Räume, die erst- bzw. zweitabzählbar sind. Dann ist das Produkt $\prod_n X_n$ auch erst- bzw. zweitabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma für die Zweitabzählbarkeit. Sei $(U_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Basis für die Topologie von X_n. Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine bijektive Funktion. Aus der Definition der Produkttopologie sehen wir, dass

$$\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times U_{f_2(n)}^{f_1(n)} \times \mathbb{R} \times \cdots\right)_n$$

eine Subbasis für $\prod_n X_n$ ist. Es existiert also eine abzählbare Subbasis. Aus ihr erhält man (indem man beliebige Schnitte endlich vieler Mengen in der Subbasis nimmt) eine abzählbare Basis. $\square$

Eine überabzählbare Produkt von zweitabzählbaren topologischen Räume ist in der Regel nicht zweitabzählbar. Zum Beispiel ist das Produkt von $|\mathbb{R}|$ Kopien von $\mathbb{R}$ nicht zweitabzählbar und nicht erstabzählbar, siehe Übung 1.