Serie 12

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

Lösung für Übung 1: Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum und seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann sind die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ (vgl. Vorlesung/Serie aus Woche 3) abgeschlossen. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es eine stetige Abbildung $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Die Behauptung folgt dann aus der Überabzählbarkeit von $[0,1]$, denn die Niveaumengen $f^{-1}(\{t\})$, $t \in [0,1]$, sind disjunkt und es gibt überabzählbar viele von ihnen. Wir zeigen die Kontraposition, d.h. dass aus f nicht surjektiv folgt, dass X nicht zusammenhängend ist. Falls f nicht surjektiv ist und $s \in [0,1]$ nicht im Bild von f ist, so sind die Urbilder $f^{-1}\big([0,s)\big)$ und $f^{-1}\big((s,1]\big)$ offen, disjunkt und nicht leer (da $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$). Somit ist X nicht zusammenhängend, im Widerspruch zur Annahme.

Übung 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta\colon X \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x, A) \coloneqq \inf_{y \in A} |d(x,y)|$$

stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

(b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 12 zu verweisen.

Lösung für Übung 2:

(a) Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\begin{aligned}\delta(x) = \inf_{z\in A} d(x,z) &\leqslant \inf_{z\in A} \big(d(x,y) + d(y,z)\big) = d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z)\\ &= d(x,y) + \delta(y).\end{aligned}$$

Somit ist $\delta(x) - \delta(y) \leqslant d(x,y)$. Analog gilt (vertauschen von x und y), dass $\delta(y) - \delta(x) \leqslant d(x,y)$. Damit ist

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leqslant d(x,y),$$

d.h. δ ist 1-Lipschitz stetig (und insbesondere stetig). Beachten Sie, dass wir dazu nicht benötigt haben, dass A abgeschlossen ist.

Sei nun $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen und somit gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x,\epsilon) \in X \setminus A$. Folglich gilt für alle $y \in A$, $d(x,y) \geqslant \epsilon$, womit $\delta(x) \geqslant \epsilon > 0$ gezeigt ist.

Falls A nicht abgeschlossen ist, muss für $x \notin A$ nicht zwingend $\delta(x) > 0$ gelten. Sei zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\delta(0) = 0$.

(b) Seien $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann ist die Funktion $f\colon X \to [0,1]$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

wohldefiniert und stetig ist und es gilt $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Übung 3.

(a) Ein topologischer Raum heisst *lokalkompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ und abgeschlossene $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene disjunkte Mengen $U, V \subset X$ existieren, sodass $x \in U$ und $A \subset V$.

(b) Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum normal ist.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir zeigen zuerst das folgende Lemma.

Lemma 1. *Sei X ein Hausdorffraum und $A \subsetneq X$ ein kompakter Unterraum. Sei $x \in X \backslash A$. Es existieren disjunkte offene Mengen $U, V \in X$ mit $x \in U$ und $A \subset V$.*

Beweis. Weil X ein Hausdorffraum ist, kann man für alle $a \in A$ disjunkte offene Menge U_a und V_a finden, sodass $x \in U_a$ und $a \in V_a$. Dann ist $(V_a)_{a \in A}$ eine Überdeckung von A. Da A kompakt ist, finden wir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \supset A$. Wir definieren $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ und $V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Wir sehen, dass U und V offen und disjunkt sind. Wir haben auch, dass $x \in U$ und $A \subset V$. □

Sei K eine kompakte Umgebung des Punkts x. Die Menge $A \cap K$ ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums selbst kompakt. Aus Lemma 1 folgt, dass zwei disjunkte offene Teilmengen $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ von K existieren, sodass $x \in \widetilde{U}$ und $A \cap K \subseteq \widetilde{V}$. Wir definieren $U := \widetilde{U} \cap K^\circ$ und $V = \widetilde{V} \cup (X \backslash K)$. Dies sind Mengen mit den gewünschten Eigenschaften.

(b) Seien A und B zwei abgeschlossene Menge von X. Da X kompakt ist, sind A und B auch kompakt. Wir können dann Lemma 1 benutzen um für alle $a \in A$ disjunkte offene Menge $U_a, V_a \subset X$ mit $a \in U_a$ und $B \subset V_a$ zu finden. Weil A kompakt ist, finden wir $a_1, \ldots, a_n$ mit $\bigcup_i U_{a_i} \supset A$. Dann führen wir den Beweis wie in Lemma 1 zu Ende.

Übung 4. $(\star)$ Wir wollen zeigen, dass wir kompakte Mannigfaltigkeiten in „schöne" topologische Räume einbetten können. Zur Erinnerung: Mit *Einbettung* meinen wir hier Homöomorphismus aufs Bild. Ein Korollar der folgenden Aussage ist auch, dass alle kompakten Mannigfaltigkeiten metrisierbar sind.

Sei M eine beliebige kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass M in $\mathbb{R}^N$ eingebettet werden kann.

Lösung für Übung 4: Sei $\{U_i\}_{i=1,\ldots,k}$ eine endliche Überdeckung der kompakten Mannigfaltigkeit M mit Mengen U_i, die Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ zulassen. Wir definieren für alle $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_i \colon M &\to S^n \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{wenn } x \in U_i \\ N & \text{wenn } x \notin U_i, \end{cases} \end{aligned}$$

wo $\mathbb{R}^n \cup \{N\} \cong S^n$ die Einpunktkompaktifizierung (vgl. Serie 4, Übung 6) von $\mathbb{R}^n$ ist. Man prüft, dass $\widetilde{\psi}_i$ stetig ist. Wir haben eine natürliche Einbettung $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und Verknüpfen ergibt eine stetig Abbildung $\psi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren $\Psi \colon M \to (\mathbb{R}^{n+1})^k$ als $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$. Wir zeigen jetzt, dass Ψ eine Einbettung ist.

Seien $x \neq y \in M$. Falls $x \in U_i$ und $y \notin U_i$, haben wir $\psi_i(x) \neq N = \psi_i(y)$, also $\Psi(x) \neq \Psi(y)$. Falls $x, y \in U_i$, dann $\psi_i(x) \neq \psi_i(y)$, also $\Psi(x) \neq \Psi(x)$. Das heisst, dass Ψ injektiv ist. Da Ψ eine injektiv und stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist, ist Ψ eine Einbettung.

Übung 5. Zeigen Sie, dass eine Überlagerung (mit höchstens abzählbaren Fasern) einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit wieder eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Lösung für Übung 5: Wir sollen zeigen, dass eine Überlagerung $p \colon X \to M$ einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M wieder ein Hausdorffraum, lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^d$, und zweitabzählbar ist.

Seien $x, y \in X$. Falls $p(x) \neq p(y)$ und weil M ein Hausdorffraum ist, können wir zwei disjunkte offene Menge $U, V \in M$ finden, sodass $p(x) \in U$ und $p(y) \in V$. Dann sind die Menge $p^{-1}(U) \ni x$ und $p^{-1}(V) \ni y$ disjunkt und offen. Falls $p(x) = p(y)$, so gibt es eine offene Menge $U \ni p(x)$, sodass $p^{-1}(U) \cong U \times S$ mit S einer höchstens abzählbaren Menge mit der diskreten Topologie. Seien $s_1, s_2 \in S$ mit $x \in U \times \{s_1\}$ und $y \in U \times \{s_2\}$, dann sind $U \times \{s_1\}$ und $U \times \{s_2\}$ disjunkte offene Menge. Das zeigt, dass X **Hausdorff** ist.

Seien $x \in X$ und $U \subset M$, sodass $p(x) \in U$, $U \cong \mathbb{R}^d$ und $p^{-1}(U) \cong U \times S$ mit S eine höchstens abzählbare Menge mit der diskrete Topologie. Es gibt $s \in S$ mit $x \in U \times \{s\}$, sodass $U \times \{s\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ ist. Das heisst, dass X lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ ist.

Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ einen Basis der Mannigfaltigkeit M. Durch Weglassen einiger U_i können wir annehmen, dass alle U_i gleichmässig überlagert sind. Dann ist $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times S_i$ und die Familie $(U_i \times \{s\})_{i \in \mathbb{N}, s \in S_i}$ ist Basis der Topologie von X. Das heisst, dass X zweitabzählbar ist.

Übung 6. Man zeichne auf der Rückseite alle bekannten Implikationen ein (auch diejenigen der Form $A \wedge B \Rightarrow C$ für Eigenschaften A, B, C).

Lösung für Übung 6: Wir haben

(i) Zweitabzählbar $\Rightarrow$ erstabzählbar (aus einer Basis der Topologie erhält man eine Umgebungsbasis von x, indem man alle Umgebungen von x aus der Basis nimmt).

(ii) Achtung! Im Generell, normal $\not\Rightarrow$ Hausdorff weil Punkten nicht abgeschlossen sein müssen. Wenn die Punkten abgeschlossen sind, ist ein normaler Raum auch Hausdorff.

(iii) Metrisierbar $\Rightarrow$ Hausdorff (offene Bälle können Punkten separieren).

(iv) Metrisierbar $\Rightarrow$ erstabzählbar (siehe Vorlesung).

(v) Metrisierbar $\Rightarrow$ normal (Übung 2, (b)).

(vi) Aus der Definition, Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ Hausdorff und zweitabzählbar.

(vii) Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ lokalkompakt, weil $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt ist.

(viii) Erstabzählbar und Kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt (Vorlesungsnotizen, Satz 14.2).

(ix) Zweitabzählbar und Folgenkompakt $\Rightarrow$ Kompakt (Vorlesungsnotizen, Satz 14.2).

(x) Metrisierbar und Folgenkompakt $\Rightarrow$ Kompakt (Analysis II).

(xi) Achtung! Wir haben Folgenkompakt $\not\Rightarrow$ Kompakt (Übung für Sie) und Kompakt $\not\Rightarrow$ Folgenkompakt (Serie 10, Übung 5).

(xii) Mannigfaltigkeit und Kompakt $\Rightarrow$ Metrisierbar (Übung 4).

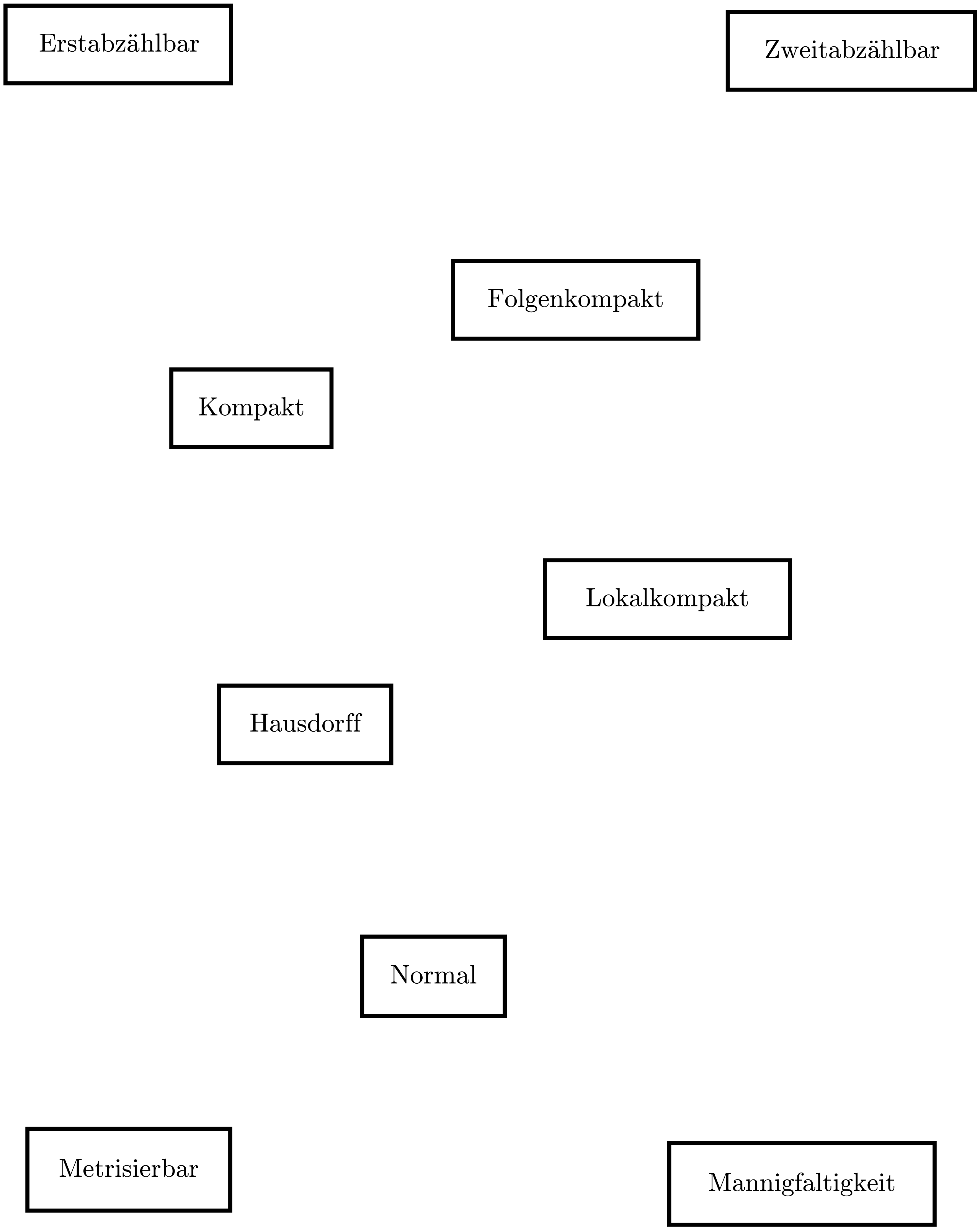
(xiii) Tatsächlich gilt sogar: Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ Metrisierbar.

(xiv) Kompakt und Hausdorff $\Rightarrow$ normal (Übung 3, (b)).

(xv) Lokalkompakt und Hausdorff $\Rightarrow$ *regulär*, d.h. man kann Punkten aus abgeschlossene Menge separieren (Übung 3, (a)).

(xvi) Kompakt $\Rightarrow$ Lokalkompakt (nach Definition)

Haben wir etwas vergessen?


Erstabzählbar
Zweitabzählbar
Folgenkompakt
Kompakt
Lokalkompakt
Hausdorff
Normal
Metrisierbar
Mannigfaltigkeit