Serie 13

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jeder Punkt in Y hat eine offene Umgebung V sodass $p(V) \subset X$ offen und $p|_V$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist).

(b) Falls $p^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist p ein Homöomorphismus.

Lösung für Übung 1: Wir zeigen zunächst (a). Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y existiert, sodass $p(V) \subseteq X$ offen und $p|_V\colon V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist. Sei $y \in Y$ und $x := p(y)$.

Es existiert eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung U von x mit Blättern U_j für $j \in J$ und einer Indexmenge J. Wegen $y \in p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j\in J} U_j$ gibt es genau ein $j \in J$ mit $y \in U_j$. Nach Definition ist $p^U_{U_j} = p|_{U_j}\colon U_j \to U$ ein Homöomorphismus, d.h. wir können $V = U_j$ setzen.

Teil (b) folgt direkt aus Teil (a), denn ein bijektiver lokaler Homöomorphismus ist auch ein (globaler) Homöomorphismus.

Übung 2. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $B := p^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $p|_B\colon B \to A$ eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 2: Fix any point $x \in A$. Since $p\colon Y \to X$ is a covering map, there exists an evenly covered (="gleichmässig überlagert") open neighborhood U of x in X. Namely $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i$, where V_i are disjoint open sets and $p|_{V_i}\colon V_i \to U$ is a homeomorphism for all $i \in I$.

We claim that $U^A := U \cap A$ is an evenly covered open neighborhood of x in A with respect to the map $p|_B\colon B \to A$. First observe that $(p|_B)^{-1}\left(U^A\right) = p^{-1}\left(U^A\right) = \cup_{i\in I} V_i^A$, where $V_i^A := V_i \cap B$ are pairwise disjoint open subsets of B. Moreover $p|_{V_i^A}\colon V_i^A \to p(V_i^A) = U^A$ maps homeomorphically V_i^A into U^A, since it is the restriction to V_i^A of the homeomorphism $p|_{V_i}\colon V_i \to U$. This concludes the proof by arbitrariness of $x \in A$.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

(b) ($\star$) Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, das nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass man Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 3:

(a) Die n-ten Einheitswurzeln, also die Lösungen von $z^n = 1$, sind $\xi_k := e^{2\pi i k/n} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir schreiben $w \in \mathbb{C}^*$ als $w = re^{i\theta}$ für $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann gilt

$$p_n^{-1}(w) = \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_1, \ldots, r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_n \right\}.$$

Die Fasern von p_n sind also endlich (mit Kardinalität n), insbesondere diskret. Weiter ist klar, dass p_n stetig und surjektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass p_n die Überlagerungsbedingung erfüllt.

Sei nun $w = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$. Dann ist die Menge $U := \left\{ re^{i\theta} \mid r > 0,\, |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^*$ eine offene Umgebung von w. Gemäss obiger Überlegung erhalten wir $p_n^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^n V_k$, wobei

$$V_k := \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k \mid\ |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\}.$$

Wir bemerken zunächst, dass $V_k \cap V_h = \emptyset$ für alle $k \neq h$ gilt: Angenommen, $r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k = r^{1/n} e^{i\theta'/n} \xi_h$ für $\theta, \theta' \in (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2)$ und $k \neq h$, dann gilt

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \equiv \frac{\theta'}{n} + \frac{2\pi h}{n} \pmod{2\pi}$$
$$\iff \theta - \theta' \equiv 2\pi(h-k) \pmod{2\pi n}.$$

Es gilt jedoch $|\theta - \theta'| < \pi < 2\pi|h-k| < 2\pi n$, was der letzten Gleichheit modulo $2\pi n$ widerspricht. Also sind $\{V_k\}_{k=1,\dots,n}$ paarweise disjunkt. Weiterhin ist es einfach zu sehen, dass $p_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ eine stetige Bijektion ist für alle $k = 1, \dots, n$. Ausserdem ist $(p_n|_{V_k})^{-1} \colon U \to V_k$ gegeben durch

$$(p_n|_{V_k})^{-1}\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta/n}\xi_k$$

für alle $e^{i\theta} \in U$, also für $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Also ist $(p_n|_{V_k})^{-1}$ ebenfalls stetig und $p_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ somit ein Homöomorphismus für alle $k = 1, \dots, n$. Die Mengen V_k sind die Blätter von p_n über der gleichmässig überlagerten Menge U.

(b) Wir zeigen das folgende Lemma.

Lemma 1. *Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und $x \in \mathbb{C}$ mit $P'(x) = c \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung von x, sodass $P|_U$ ein Homöomorphismus zwischen U und $P(U)$ ist.*

Beweis. Bei x haben wir $P(z) = f(x) + c(z-x) + o((z-x)^2)$. Wenn r klein genug ist, ist $P|_{\overline{B(x,r)}}$ bijektiv und stetig. Der Definitionsbereich von $P|_{\overline{B(x,r)}}$ ist Hausdorff und $\overline{B(x,r)}$ ist kompakt. Mit Satz 5 in der Vorlesung 4 haben wir, dass P ein Homöomorphismus ist. □

Bemerkung 1. *Man kann auch den Umkehrsatz (inverse function theorem) benutzen.*

Sei $S = (P')^{-1}(\{0\})$. Da P' ein Polynom ist und P' nicht null ist, ist S eine endliche Menge. Sei nun $\{z_1, \dots, z_n\} = P(S)$. Wir zeigen jetzt, dass

$$P \colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist. Sei $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, dann gilt für alle $y \in P^{-1}(\{x\})$, dass $P'(y)$ nicht gleich 0 ist. Seien $y_1, y_2, \dots, y_m$ die Elemente aus $P^{-1}(\{x\})$. Mit dem Lemma finden wir $U_1, \dots, U_m$ disjunkte (falls nicht disjunkt, nehme kleine Umgebungen) Umgebungen von $y_1, y_2, \dots, y_m$, sodass $P|_{U_i}$ ein Homöomorphismus ist. Sei $U \coloneqq \bigcap P(U_i)$. Dann ist U gleichmässig überlagert. Die Übung folgt.

Übung 4. ($\star$) Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p \colon X \to Y$ und $q \colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p \colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 4: Let $z \in Z$, let $y_1, \dots, y_n$ be the preimages of z with respect to the map q (by assumption they are in finite number), and let U be an evenly covered neighborhood of z (with respect to the cover $q \colon Y \to Z$). For all $i = 1, \dots, n$, let U_i be an evenly covered open neighborhood of y_i (with respect to the cover $p \colon X \to Y$) and define $V_i \coloneqq U_i \cap q^{-1}(U)$. Note that for every $i = 1, \dots, n$ we have that:

- V_i is an open neighborhood of y_i;
- $q|_{V_i}$ is a homeomorphism between V_i and $q(V_i)$;
- V_i is an evenly covered neighborhood for $p \colon X \to Y$.

Now, we can define $W \subseteq Z$ as

$$W \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} q(V_i).$$

Since n is finite, W is an open subset of Z. Moreover, since W is contained in an evenly covered neighborhood of z (with respect to $q \colon Y \to Z$), we have that W is an evenly covered neighborhood of z as well. On the other hand, since $q^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, we have that $q^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, where W_i is contained in V_i for all $i = 1, \dots, n$, thus W_i are disjoint evenly covered neighborhoods of y_i (with respect to p).

We claim that W is an evenly covered open neighborhood of z with respect to $q \circ p$. Note that we have $(q \circ p)^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(W_i)$, where $p^{-1}(W_i)$ are pairwise disjoint (since W_i are pairwise disjoint). Moreover, since every W_i is an evenly covered neighborhood for the covering map p, we have that $p^{-1}(W_i) = \bigcup_{j \in J_i} T_i^j$, where $T_j^i \subseteq X$ are disjoint subsets and $p|_{T_i^j} : T_i^j \to W_i$ is a homeomorphism. As a result we have that $(q \circ p)|_{T_i^j} = q|_{W_i} \circ p|_{T_i^j} : T_i^j \to W$ is a homeomorphism, because it is the composition of two homeomorphism. Thus, W is an evenly covered neighborhood of $z \in Z$ with respect to $q \circ p$. Since $z \in Z$ was arbitrary, this concludes the proof.

An example of a composition of two covering maps (without the assumption that q is a finite covering) that is not a covering map can be found in Hatcher, exercise 1.3.6 (p. 79).

Übung 5. Sei $f\colon S^1 \to S^1$,

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \\ \bar{z}^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \leqslant 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: die Abbildung f ist stetig, für alle $z \in S^1$ hat $f^{-1}(z)$ zwei Elemente, und jedes $z \in S^1$ hat eine offene Umgebung U sodass $f^{-1}(U)$ homöomorph zu $U + U$ ist; aber f ist keine Überlagerung.

Lösung für Übung 5: Für eine einfachere Schreibweise identifizieren wir S^1 mit $X = [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ (via $t \mapsto e^{it}$), d.h. das Intervall $[0, 2\pi]$, dessen Endpunkte wir zu einem Punkt zusammenschlagen (dem Punkt $1 \in S^1$). Dann ist $f\colon X \to X$ gegeben durch

$$f(\theta) = \begin{cases} 2\theta & \text{wenn } \theta \in [0, \pi] \\ 4\pi - 2\theta & \text{wenn } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert und nach dem Verklebungslemma **stetig**.

Die Teilmenge $U = (0, 2\pi) \subset X$ ist gleichmässig überlagert, denn $f^{-1}(U) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, und eingeschränkt auf $(0, \pi)$ bzw. $(\pi, 2\pi)$ ist f ein Homöomorphismus nach U. Insbesondere haben alle $\theta \in X$ ausser $0 = 2\pi$ genau **zwei Urbilder**. Aber auch dieser Punkt hat zwei Urbilder, denn $f^{-1}(0) = \{0, \pi\}$.

Im übrigen hat 0 **eine Umgebung** U sodass $f^{-1}(U) \cong U + U$. Sei $0 < \varepsilon < \pi$. Dann können wir $U = (2\pi - \varepsilon, 2\pi] \cup [0, \varepsilon) \subset X$ verwenden. Beachte, dass U einfach zum offenen Einheitsintervall homöomorph ist, da $2\pi = 0 \in X$. Nun ist $f^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $(\pi - \varepsilon/2, \pi + \varepsilon/2)$ und $(2\pi - \varepsilon/2, 2\pi] \cup [0, \varepsilon/2)$, die beide jeweils zu U homöomorph sind.

Was aber schiefgeht, ist: die Einschränkung von f auf $(\pi - \varepsilon/2, \pi + \varepsilon/2)$ ist kein Homöomorphismus nach U. Denn $f|_{(\pi-\varepsilon/2, \pi+\varepsilon/2)}$ hat als Bild nur $(2\pi - \varepsilon, 2\pi] \neq U$, und ist auch nicht injektiv. Das gleiche Problem tritt bei der Einschränkung von f auf $(2\pi - \varepsilon/2, 2\pi] \cup [0, \varepsilon/2)$ auf.

Da U zusammenhängend ist, und $f^{-1}(U)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, gibt es auch keine andere Zerlegung von $f^{-1}(U)$ in zwei Blätter. Also ist U nicht gleichmässig überlagert. Ausserdem gibt es auch keine andere gleichmässig überlagerte Umgebung U' von 0; denn jede offene Umgebung U' von 0 enthält ein U wie oben, und wäre U' gleichmässig überlagert, so auch $U \subset U'$. Es folgt, dass f **keine Überlagerung** ist.

Übung 6. Satz 17.6 aus der Vorlesung besagt: operiert eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem Raum Y (d.h. jedes $y \in Y$ hat eine offene Umgebung U sodass für alle $g \in G$ gilt $U \cap gU = \varnothing$), und ist Y einfach zusammenhängend, so folgt $\pi_1(Y/G, x_0) \cong G$. Benutzen Sie diesen Satz, um die Fundamentalgruppen der folgenden Räume zu bestimmen:

(a) $\mathbb{R}P^2$,

(b) $T^2 = S^1 \times S^1$,

(c) ($\star$) die Kleinsche Flasche.

Lösung für Übung 6:

(a) Man kann den Raum $\mathbb{R}P^2$ als ${S^2}/{\mathbb{Z}/2}$ schreiben, wobei $1 \in \mathbb{Z}/2$ als die antipodale Abbildung $x \mapsto -x$ operiert. Da S^2 einfach zusammenhängend ist, haben wir $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$.

(b) Die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ operiert durch Verschiebungen auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $T^2 \cong {}^{\mathbb{R}^2}\!/_{\mathbb{Z}^2}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, haben wir $\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$.

(c) Sei KF die Kleinsche Flasche. Seien zwei Abbildungen

$$\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x+1, y) \text{ und } \sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (1-x, y+1)$$

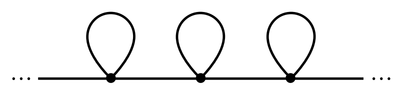
und $G \subset \mathrm{Aff}_2(\mathbb{R})$ die Untergruppe der affinen invertierbaren Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$, die von σ und τ erzeugt ist. Die Abbildung σ heisst Schubspiegelung oder Gleitspiegelung (sie ist die Verknüpfung einer Spiegelung und einer Verschiebung entlang der gleichen Achse). Die Kleinsche Flasche kann man als

$$[0,1] \times [0,1]/\sim, \qquad (0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (1-x, 1)$$

schreiben. Da $\tau(0, y) = (1, y)$ und $\sigma(x, 0) = (1-x, 1)$, sehen wir, dass ${}^{\mathbb{R}^2}\!/_{G} \cong \mathsf{KF}$. Das heisst, dass $\pi_1(\mathsf{KF}, x_0) \cong G$.

Bemerkung: Wir haben $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1}$ und man kann zeigen, dass $G \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Übung 7. Ähnlich wie in Serie 9, Übung 5 betrachten wir Graphen – diesmal allerdings auch unendliche. Seien V, E diskrete Räume, und $a, b\colon E \to V$ Funktionen. Dann heisst der topologische Raum $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $(e, 0) \sim a(e)$ und $(e, 1) \sim b(e)$ ein *Graph*. Die Punkte $v \in V \subset X$ heissen *Ecken*, und die Unterräume $e \times [0,1]/\sim \subset X$ für $e \in E$ *Kanten*. Zeigen Sie, dass ein Überlagerungsraum eines Graphen wieder ein Graph ist.



Beispiel eines unendlichen Graphen

Lösung für Übung 7: Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und X ein Graph wie in der Übung. Wir konstruieren im folgenden E', V', a', b' für Y, um zu zeigen, dass Y ein Graph ist. Sei $V' = p^{-1}(V)$. Man prüft (unter Verwendung, dass p eine Überlagerung ist), dass $V' \subset Y$ diskret ist.

Eine Kante $\{e\} \times [0,1]/\sim \subset X$ von X ist das Bild eines Wegs $\sigma\colon [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = a(e)$ und $\sigma(1) = b(e)$. Für alle Hochhebungen $\widetilde{\sigma}$ betrachten wir ein e' mit $a'(e') = \widetilde{\sigma}(0)$ und $b'(e') = \widetilde{\sigma}(1)$. Sei E' die Menge aller solchen e', für alle Kanten von X. Dies definiert die Menge E' und die Funktionen a', b'.

Man prüft nun, dass der durch V', E', a', b' definierte Graph homöomorph zu Y ist.

Die folgenden Übungen benötigen Stoff aus der letzten Vorlesung von Montag, dem 26.5.

Übung 8. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

Lösung für Übung 8: Weil $Z \subseteq \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend ist, ist es auch wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Wir betrachten die Überlagerung $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$, und wählen ein $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ mit $p(\tilde{z}) = z_0$. Nach dem Hochhebbarkeitskriterium existiert nun eine stetige Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$ mit $p \circ \log = i$ (also $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$) und $\log(z_0) = \tilde{z}$ genau dann, wenn

$$i_*(Z, z_0) \subseteq p_*\left(\pi_1\left(\mathbb{C}, \tilde{z}\right)\right) = p_*\left(\{0\}\right) = \{0\}$$

gilt, also genau dann, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist.

Übung 9. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

Lösung für Übung 9: Wir identifizieren den Torus T^2 mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und betrachten die beiden Überlagerungen $p\colon T^2 \to T^2$ und $p'\colon T^2 \to T^2$ gegeben durch $p([(t,s)]) \coloneqq [(2t, 2s)]$ und $p'([(t,s)]) \coloneqq [(t, 4s)]$ für $[(t,s)] \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Beachten Sie, dass p und p' beide Überlagerungen vom Grad 4 über T^2 sind. Ausserdem gilt

$$p_*(\pi_1(T^2)) = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2) \quad \text{und} \quad p_*(\pi_1(T^2)) = \mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2).$$

Nehmen wir nun an, dass es Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt, so dass $p' \circ \phi = \psi \circ p$ gilt, dann ist insbesondere

$$(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) = p'_*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = p'_* \circ \phi_*(\pi_1(T^2)) = \psi_* \circ p_*(\pi_1(T^2)) = \psi_*(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})),$$

d.h. es gibt einen Isomorphismus $F = \psi_*\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $F(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})) = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$. Dies ist aber nicht möglich, denn die Quotienten $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/((2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sind nicht isomorph.

Übung 10. ~~Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.~~ *Diese Aufgabe ist gestrichen. Zur Lösung bräuchte man das Hochhebbarkeitskriterium (siehe z.B. Jänich S. 174 oder Hatcher Proposition 1.33. S. 61, welches wir in der Vorlesung nicht mehr betrachtet haben.*

Lösung für Übung 10: Aus der Endlichkeit der Fundamentalgruppe von X folgt, dass jedes Element $h \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat. Daher hat das Element $f_*(h) \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ebenfalls endliche Ordnung (weil f_* ein Homomorphismus ist), was impliziert, dass es Null ist, da es keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{Z}$ gibt. Wir haben also gezeigt, dass $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} \subseteq \pi_1(S^1)$.

Betrachten wir nun die universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ von S^1. Wegen $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} = p_*(\pi_1(\mathbb{R}))$ sind die Voraussetzungen des Hochhebbarkeitskriteriums erfüllt und somit existiert eine Hochhebung $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ von f. Weil $\mathbb{R}$ zusammenziehbar (kontrahierbar) ist, ist nach Aufgabe 5 (b) von Serie 6 jede Abbildung $X \to \mathbb{R}$ homotop zu einer konstanten Abbildung, also ist auch $f = p \circ \tilde{f}$ homotop zu einer konstanten Abbildung (betrachte die Verknüpfung einer Homotopie $X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit p.)

Übung 11. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei

(a) $X = S^1$,

(b) $X = S^1 \times S^2$,

(c) $X = S^1 \vee S^2$.

Lösung für Übung 11:

(a) Die Klassifikation der Überlagerungen gibt uns eine 1:1 Korrespondenz zwischen den Isomorphietypen der Überlagerungen von S^1 und den Untergruppen von $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Die triviale Untergruppe entspricht der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{it}$. Die nicht-trivialen Untergruppen sind alle von der Form (n) für ein $n \geqslant 1$, und entsprechen der Überlagerung $S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$.

(b) Wegen $\pi_1\left(S^2\right) \cong \{1\}$ gibt es bis auf Isomorphie nur die universelle Überlagerung $\mathrm{id}\colon S^2 \to S^2$ von S^2. Die Überlagerungen von $S^1 \times S^2$ sind die Produkte $\mathbb{R} \times S^2 \to S^1 \times S^2, (r, x) \mapsto \left(e^{2\pi i r}, x\right)$ und $S^1 \times S^2 \to S^1 \times S^2, (z, x) \mapsto (z^n, x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$ ist der topologische Raum, der aus $\mathbb{R}$ entstet, indem wir an jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ eine Kopie der Sphäre S^2 kleben. Die weiteren Überlagerungsräume sind bis auf Isomorphie die Quotientenräume X_n für $n \in \mathbb{N}$, wobei wir X_n jeweils bilden, indem wir an alle n-ten Einheitswurzeln in S^1 eine Kopie der Sphäre S^2 kleben.

Übung 12.

(a) ($\star$) Finden Sie eine Überlagerung $p\colon Y \to S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y, y_0)$ unendlich erzeugt ist.

(b) ($\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.

(c) ($\star\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.

Lösung für Übung 12: (a) Siehe Hatcher, S. 58, Abbildung (11).

(b) Die 2-blättrigen Überlagerungen entsprechen genau den Untergruppen von $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1) = \langle a, b \rangle$ mit Index 2. Alle solchen Untergruppen sind Normalteiler, und also Kerne einer surjektiven Abbildung $\langle a, b \rangle \to \mathbb{Z}/2$. Da a und b jeweils auf 0 oder 1 geschickt werden können, gibt es vier solcher Abbildungen, von denen drei surjektiv sind. Es gibt also genau drei solche Überlagerungen (bis auf Isomorphie). Zwei dieser Überlagerungen sind abgebildet in Hatcher, S. 58, Abbildung (1) und (2).

(c) Die Strategie aus (b) liefert vier Überlagerungen, deren entsprechende Untergruppen Normalteiler sind. Aber es gibt auch Untergruppen von Index 3, die keine Normalteiler sind. Tatsächlich ist es einfacher, alle Überlagerungen von Grad 3 (mit topologischen Mitteln) zu finden, als alle Untergruppen von Index 3 (mit algebraischen Mitteln). Man verwende, dass eine Überlagerung Y des Graphen $S^1 \vee S^1$ wieder ein Graph ist. Da $S^1 \vee S^1$ eine Ecke und zwei Kanten hat, hat Y drei Ecken und sechs Kanten. Man kann alle solchen Graphen auflisten, bei denen ausserdem jede Ecke inzident zu vier Kanten ist. Für jeden dieser Graphen gibt es noch verschiedene Möglichkeiten, den Basispunkt y_0 zu wählen, und eine Überlagerungsabbildung zu definieren. Insgesamt findet man 9 solche Überlagerungen, insgesamt also 13.