Serie 2

1. **Dialyse**

   Ein Dialyse-Gerät wird an den Blutkreislauf eines Patienten angeschlossen und reinigt das Blut des Patienten durch eine semi-permeable Membran. Im Körper des Patienten wird aufgrund einer Krankheit laufend Gift produziert, welches das Dialyse-Gerät fortwährend heraus filtert. Wir nehmen folgendes Modell an:

   - Das Blut des Patienten habe das Volumen V_1 und sei ein Reaktor mit der Giftkonzentration C_1.
   - Das Blut im Dialyse-Gerät habe das Volumen V_2 und sei ein Reaktor mit der Giftkonzentration C_2.
   - Das pro Zeiteinheit mit der konstanten Durchflussrate $Q > 0$ ins Dialysegerät strömende Blutvolumen entspricht dem pro Zeiteinheit in den Körper zurückströmendem Blutvolumen (kein Blut geht verloren).
   - Das Gift ströme mit j_{in} in den Blutkreislauf ein (proportional zum Blutvolumen V_1 im Körper).
   - Das Gift verlasse das Blut über die semi-permeable Membran proportional zu dessen Menge im Dialysegerät mit einer Rate $a > 0$.

   Deklarieren Sie sämtliche Variablen, welche Sie verwenden.

   (a) Skizzieren Sie ein Boxmodell mit den Systemvariablen M_1 und M_2, d.h. mit den Giftmengen im Blut respektive im Dialysegerät.

   (b) Stellen Sie die Bilanzgleichungen zu den Systemvariablen auf.

   (c) Dividieren Sie die Differentialgleichung aus der Teilaufgabe (1b) für M_1 durch V_1 und die Differentialgleichung für M_2 durch V_2, um die Differentialgleichungen für die Konzentrationen $C_1 = \dfrac{M_1}{V_1}$ und $C_2 = \dfrac{M_2}{V_2}$ des Giftes im Blut respektive im Dialysegerät zu erhalten. Berechnen Sie dann die Gleichgewichtskonzentration in den beiden Teilsystemen.

   (d) Langfristig ist eine Dialyse nur sinnvoll, wenn das Gift nicht mehr ins Blut gelangt. Nach einer erfolgreichen Behandlung versiege die Giftquelle im Körper. Zeigen Sie, dass der Gleichgewichtszustand dann tatsächlich $(C_1, C_2) = (0, 0)$ ist.

2. **Ein SI-Modell**

   Gegeben sei ein Modell mit einer festen Populationsgrösse N. Diese teile sich zu jeder diskreten Zeiteinheit n in zwei Bevölkerungsgruppen:

   die so genannten Suszeptiblen S_n, welche zwar noch gesund, aber prinzipiell für die Krankheit anfällig sind, und die Infizierten I_n, die bereits an der Krankheit leiden.

In jedem (diskreten) Zeitschritt steckt sich nun ein gewisser Prozentsatz a der Suszeptiblen mit der Krankheit an, während ein gewisser Anteil b von Infizierten wieder suszeptibel wird.

Online-Abgabe Welche beiden Gleichungen für den nächsten Zeitschritt S_{n+1} und I_{n+1} passen zu diesem Modell?

(a) $S_{n+1} = S_n - aS_n + bI_n$

(b) $S_{n+1} = S_n + aS_n - bI_n$

(c) $S_{n+1} = S_n - abS_n$

(d) $I_{n+1} = I_n + aS_n - bI_n$

(e) $I_{n+1} = I_n - aS_n + bI_n$

(f) $I_{n+1} = I_n + abS_nI_n - bI_n$

Spätestens nach der Online-Abgabe kennen Sie die Gleichungen für S_{n+1} und I_{n+1}. Gibt es einen Gleichgewichtszustand? Bestimmen Sie diesen allenfalls.

3. **Ein Boxmodell**

Gegeben sei ein 2-dimensionales Boxmodell $y'(x) = Ay(x)$ mit

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

(a) Wir nehmen an, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21} > 0.$$

Zeigen Sie, dass das Modell zum Stationärzustand strebt.

(b) Analog zum eindimensionalen Fall möchten wir auch hier eine Anpassungszeit $T_{\frac{1}{20}}$ bestimmen. Diese lässt sich grob mit Hilfe des betragsmässig kleineren EW $\min \lambda_i$ abschätzen: $T_{\frac{1}{20}} \approx \dfrac{3}{\min|\lambda_i|}$. Begründen Sie, warum dies eine sinnvolle Abschätzung ist, indem Sie die allgemeine Lösung des Systems für $t \to \infty$ anschauen.

4. **Online-Abgabe**

1. Wir betrachten die Ausbreitung eines Virus nach dem SIR-Modell mit Koeffizienten $c = 0.001$.

Zu Beginn gäbe es $S(0) = 100$ Ansteckbare. Bei welchen Heilungskoeffizienten w wissen Sie, dass sich die Krankheit nicht weiterverbreitet?

(a) $w = 0.04$

(b) $w = 0.08$

(c) $w = 0.12$

(d) $w = 0.16$

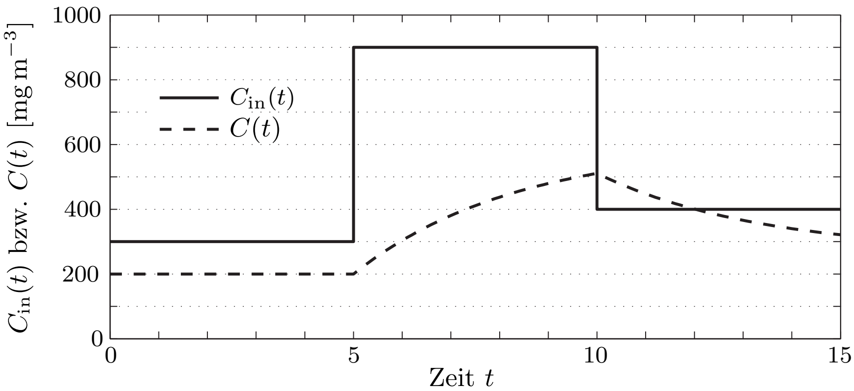
(e) Dafür habe ich zu wenig Information

2. Ein Medikament M gelange durch Blutdurchfluss in ein Organ O (linearer Durchflussreaktor). Dabei gelte:

- Die Konzentration von M zur Zeit t in der Blutzufuhr sei $C_{in}(t)$.
- Die Konzentration in O sei $C(t)$ und erfülle die DGL

$$C' = \gamma(C_{\text{in}} - C) - kC$$

  mit konstanten Raten γ, k.
- Der Verlauf der Konzentrationen sei durch folgende Abbildung gegeben.



Dann gilt:

(a) $\gamma = \frac{2}{3}$

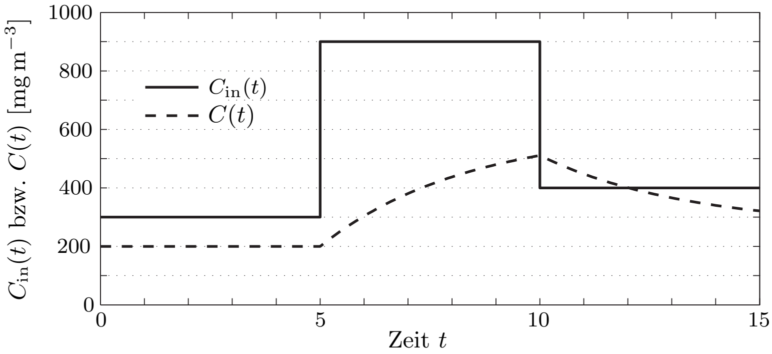
(b) $k = \frac{2}{3}$

(c) $\frac{\gamma}{\gamma + k} = \frac{2}{3}$

(d) $\frac{\gamma}{\gamma - k} = \frac{2}{3}$

(e) Es sind keine Aussagen über γ und k möglich.

3. Welche Aussagen gelten in der Situation oben mit



(a) Das Organ O befindet sich zur Zeit $t = 2$ im Stationärzustand.

(b) Das Organ O befindet sich zur Zeit $t = 12$ im Stationärzustand.

(c) Das Medikament M wird in O abgebaut.

(d) Bleibt die Konzentration der Zufuhr auf dem Niveau von $t = 15$, dann konvergiert die Konzentration in O gegen Null

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 10. Oktober 2016 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Vorraum vom HG G 53.2.