# Serie 10

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 5. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (Link über https://metaphor.ethz.ch/x/2025/hs/401-0171-00L/).

**1.** Für die vier Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ gelten welche der folgenden Aussagen?

(a) $\det(A) = 0$.

(b) Der Rang von $A$ ist 3.

(c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.

(e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.

(f) Die Matrix $A$ hat eine Inverse.

**2.** [**Prüfungsaufgabe, Frühling 2007**] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$.

(b) Für welche Werte der Parameter $a, b, c, d$ ist die Matrix $A$ singulär?

**3.** *Cramer'sche Regel, 1750*
Sei $A$ eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Ersetzt man die $k$-te Spalte von $A$ durch $b$, erhält man eine Matrix $A_k$. Beweisen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

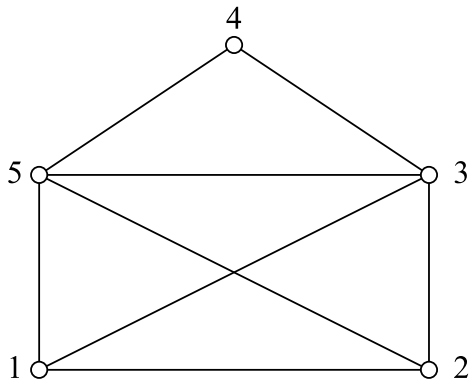
gegeben ist.

*Bemerkung:* Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramer'sche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

**4.** *Adjazenzmatrix und Laplace-Operator eines Graphen*
Ein Graph $G$ mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix $A^G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschrieben, wobei der $(i, j)$-te Eintrag von $A^G$ gegeben ist durch

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispielsweise gehört zum untenstehenden Graph $G$




G

die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $d_i$ der Grad des Knotens $i$, d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n).$$

Dann heisst die Matrix

$$L^G := D^G - A^G$$

Laplace-Operator auf $G$.

(a) Zeigen Sie für beliebige $G$, dass $\det(L^G) = 0$ gilt.

(b) Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von $L^G$ die Anzahl der $G$ aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.