Bonusaufgabe 10

Aufgabe 10.1

Betrachten Sie die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der beiden Matrizen A_1 und A_2. Zeichnen Sie die Eigenräume von A_1 und A_2 in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

Die Matrix A_1 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:T_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:D_1}.$$

(b) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_1 und die Diagonalmatrix D_1 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

(c) Ist es auch möglich, die Matrix A_1 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Die Matrix A_2 kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}.$$

(d) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix T_2 und die Diagonalmatrix D_2 mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?

(e) Ist es auch möglich, die Matrix A_2 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Aufgabe 10.2

Betrachten Sie die Matrizen $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der Matrizen B_1 und B_2.

(b) Diagonalisieren Sie die Matrix B_1 mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe. Denn: Die Diagonalisierung von 2×2-Matrizen und 3×3-Matrizen verläuft analog.

(c) Ist es auch möglich, die Matrix B_1 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

(d) Diagonalisieren Sie die Matrix B_2 mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe.

(e) Ist es auch möglich, die Matrix B_2 mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Aufgabe 10.3

Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen A_1 und B_1. Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?