# Bonusaufgabe 9

## Aufgabe 9.1

Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst. Kann man daraus folgern, dass $\lambda x$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass $A(\lambda x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ und $u \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ respektive $Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen. Kann man daraus folgern, dass $w+u$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass $A(w+u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge $K_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge $K_1$.

i. Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $K_1$? Begründen Sie.

ii. Liegt der Vektor $t = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ in $K_1$? Begründen Sie.

iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in $K_1$ liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge $K_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen $K_1$ und $K_2$. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 9.2

Betrachten Sie wiederum die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Av = w$ löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $Au = \lambda w$ löst? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $v_1 \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme $Av_1 = w_1$ respektive $Av_2 = w_2$ lösen. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = w_1 + w_2$ löst? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Menge $I_1 = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^3 :\; Av = w \right\}$. Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge $I_1$.

i. Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $I_1$? Begründen Sie.

ii. Liegt der Vektor $t = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ in $I_1$? Begründen Sie.

iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in $I_1$ liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Bilden die Vektoren $Av_1$, $Av_2$ und $Av_3$ auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$? Bilden die Vektoren $Av_1$, $Av_2$ und $Av_3$ eine Basis von $I_1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Betrachten Sie wiederum die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge $I_2 = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, x \in \mathbb{R}^3 :\; F(x) = w \right\}$. Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen $I_1$ und $I_2$. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 9.3

Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die Mengen

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad I = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^2 : Bv = w \right\}.$$

(a) Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $K$? Begründen Sie.

(b) Liegt der Vektor $s = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $I$? Begründen Sie.

(c) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Bilden die Vektoren $Bv_1$ und $Bv_2$ auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden die Vektoren $Bv_1$ und $Bv_2$ eine Basis von $I$? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 9.4

(a) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2x3}$. Ist es möglich, dass die Menge $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Gv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2x3}$. Ist es möglich, dass die Menge $I = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ v \in \mathbb{R}^3 :\ Gv = w \right\}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3x2}$. Ist es möglich, dass die Menge $K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3x2}$. Ist es möglich, dass die Menge $I = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\ v \in \mathbb{R}^2 :\ Hv = w \right\}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.