Lernkontrolle

Aufgabe I

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

(a) Wahr

(b) Falsch

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

(a) Wahr

(b) Falsch

3. 0 ist ein Eigenwert von A.

(a) Wahr

(b) Falsch

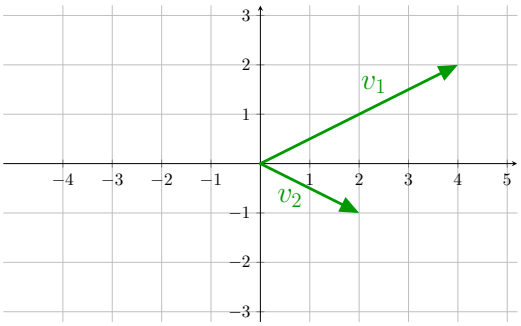
4. -1 ist ein Eigenwert von A.

(a) Wahr

(b) Falsch

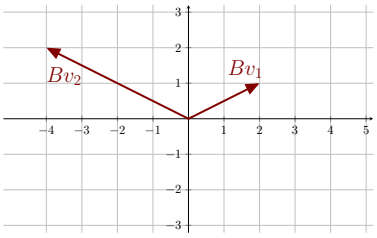
Aufgabe II

Die untenstehende Grafik zeigt zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 einer Matrix B.



Entscheiden Sie für jede der vier Grafiken unten, ob sie eine mögliche Darstellung von Bv_1 und Bv_2 beinhalten (Wahr) oder nicht (Falsch).

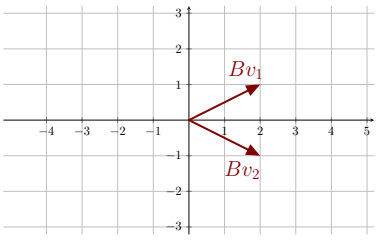
5.



(a) Wahr

(b) Falsch

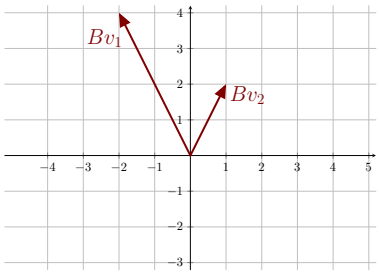
6.



(a) Wahr

(b) Falsch

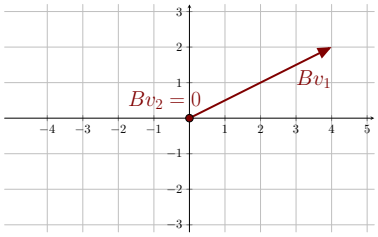
7.



(a) Wahr

(b) Falsch

8.



(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe III

Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Betrachten Sie zudem die Polynome $u(x) = x^3 - 2x + 1$, $v(x) = 2x^2$ und $w(x) = -11x^2$, sowie die Polynome $s(x)$ und $t(x)$ mit $\langle s, t \rangle = \frac{5}{3}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

9. w besitzt Länge 11.

(a) Wahr

(b) Falsch

10. Es gilt $\langle -4s, 3t \rangle = -20$.

(a) Wahr

(b) Falsch

11. u und v sind orthogonal.

(a) Wahr

(b) Falsch

12. Es gilt $\langle t, s \rangle = -\frac{5}{3}$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe IV

Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definieren (Wahr) oder nicht (Falsch).

Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

13. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$

(a) Wahr

(b) Falsch

14. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$

(a) Wahr

(b) Falsch

15. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$

(a) Wahr

(b) Falsch

16. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe V

Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\Pi_v \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

17. Es gilt $\Pi_{2v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Wahr

(b) Falsch

18. Es gilt $\Pi_v(v) = v$.

(a) Wahr

(b) Falsch

19. Es gilt $\Pi_v \left(\Pi_v \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$.

(a) Wahr

(b) Falsch

20. Es gilt $\Pi_v \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Wahr

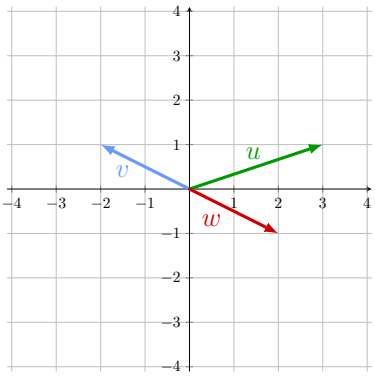
(b) Falsch

Aufgabe VI

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils drei Vektoren u, v und w im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Weiter beschreibt Π_v die orthogonale Projektion auf v.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob $w = \Pi_v(u)$ gilt (Wahr) oder nicht (Falsch).

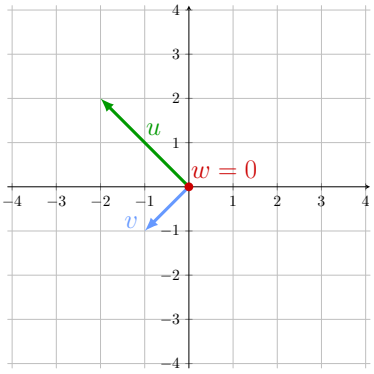
21.



(a) Wahr

(b) Falsch

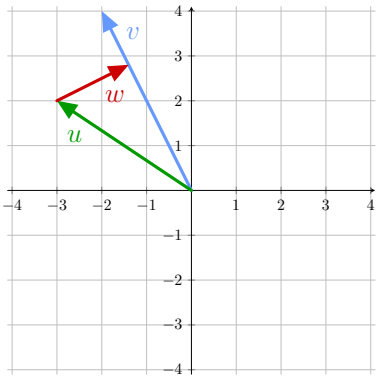
22.



(a) Wahr

(b) Falsch

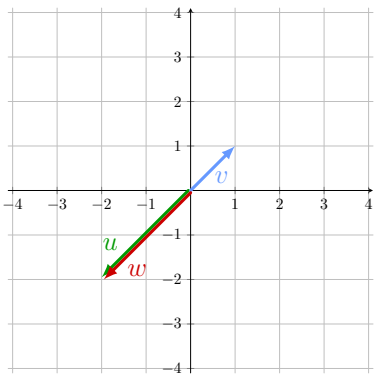
23.



(a) Wahr

(b) Falsch

24.



(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VII

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

25. $v_1 \in \mathrm{Im}(A)$.

(a) Wahr

(b) Falsch

26. $v_1 \in \mathrm{Ker}(A)$.

(a) Wahr

(b) Falsch

27. $v_2 \in \mathrm{Im}(A)$.

(a) Wahr

(b) Falsch

28. $v_2 \in \mathrm{Ker}(A)$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe VIII

Betrachten Sie beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

29. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Im}(C)) < 3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

30. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Im}(A)) < 3$.

(a) Wahr

(b) Falsch

31. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Ker}(C)) > 0$.

(a) Wahr

(b) Falsch

32. Es gilt sicherlich $\dim(\mathrm{Ker}(A)) > 0$.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe IX

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diagonalisieren die Matrix A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $A = TDT^{-1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

33. D ist eine der folgenden Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wahr

(b) Falsch

34. Es gilt $A^{2024} = TD^{2024}T^{-1}$.

(a) Wahr

(b) Falsch

35. Die Spaltenvektoren von T bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Wahr

(b) Falsch

36. Die Spaltenvektoren von T sind orthogonal.

(a) Wahr

(b) Falsch

Aufgabe X

Betrachten Sie die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

37. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal.

(a) Wahr

(b) Falsch

38. Alle Eigenwerte von C sind reell.

(a) Wahr

(b) Falsch

39. C ist diagonalisierbar mithilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix.

(a) Wahr

(b) Falsch

40. Es existiert eine Eigenbasis zu C.

(a) Wahr

(b) Falsch