Lineare Algebra II

Bonusaufgabe: Lernkontrolle FS26

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

1.1 Betrachten Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. wahr

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. falsch

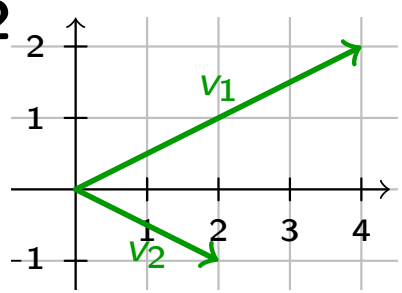
(c) 0 ist ein Eigenwert von A. wahr

(d) -1 ist ein Eigenwert von A. falsch

Antwort. Bei einer Dreiecksmatrix stehen die EW auf der Diagonalen.
Ob ein Vektor ein EV ist, sieht man durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

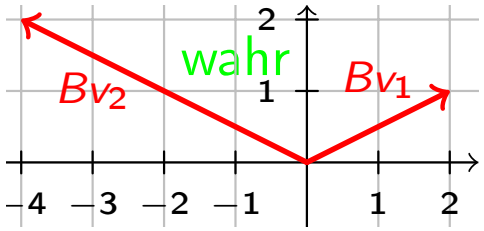
1.2



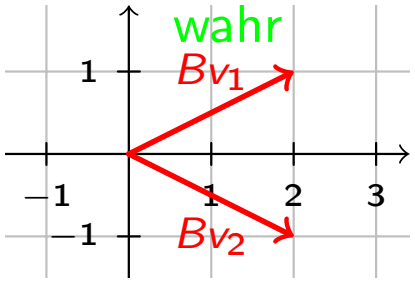
Die Graphik zeigt die EV v_1 und v_2 einer Matrix B.

Entscheiden Sie für jede der vier Grafiken unten, ob sie eine mögliche Darstellung von Bv_1 und Bv_2 ist (wahr) oder nicht (falsch).

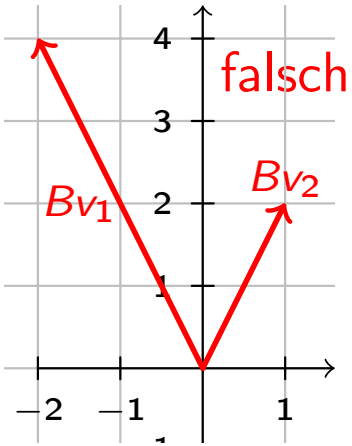
(a)



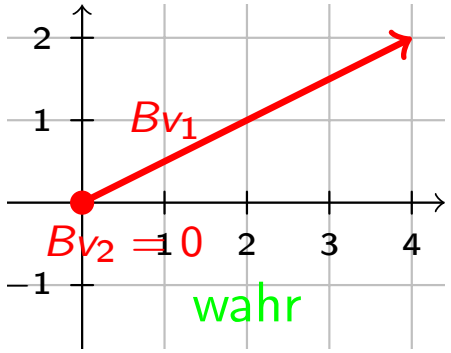
(b)



(c)



(d)



Antwort. EV werden unter der Abbildung $x \mapsto Bx$ gestreckt. Streckungsfaktor ist der EW.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

2.1 Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

die Polynome $u(x) = x^3 - 2x + 1$, $v(x) = 2x^2$, $w(x) = -11x^2$, sowie zwei Polynome $s(x), t(x)$ mit $\langle s, t \rangle = \frac{5}{3}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) w besitzt die Länge 11. falsch

(b) Es gilt $\langle -4s, 3t \rangle = -20$. wahr

(c) u und v sind orthogonal. wahr

(d) Es gilt $\langle t, s \rangle = -\frac{5}{3}$. falsch

Antwort. (a) $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (-11x^2)^2 dx} = 11/\sqrt{5}$.

(d) $\langle -4s, 3t \rangle = (-4) \cdot 3 \langle s, t \rangle = (-4) \cdot 3 \cdot \frac{5}{3} = -20$.

(c) $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)(2x^2) dx = 0$.

(d) $\langle s, t \rangle = \langle t, s \rangle = \frac{5}{3}$.

2.2 Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definieren (wahr) oder nicht (falsch).
Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

(a) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2.$ falsch

(b) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$ wahr

(c) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_2 + x_2y_1.$ falsch

(d) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2.$ falsch

Antwort. (a) ist nicht symmetrisch.

(b) ist symmetrisch, linear in beiden Argumenten und positiv definit: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2$ (oder mit Hurwitz).

(c) ist nicht positiv definit: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2.$

(d) ist nicht linear in den Argumenten.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

3.1 Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\Pi_v\binom{1}{3} = \binom{2}{1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Es gilt $\Pi_{2v}\binom{1}{3} = \binom{4}{2}$. falsch
(b) Es gilt $\Pi_v(v) = v$. wahr
(c) Es gilt $\Pi_v(\Pi_v\binom{1}{3}) = 0$. falsch
(d) Es gilt $\Pi_v\binom{2}{6} = \binom{4}{2}$. wahr

Antwort. (a) Für jedes reelle $\lambda \neq 0$ gilt $\Pi_{\lambda v}(u) = \Pi_v(u)$.

(b) Für jedes reelle λ gilt $\Pi_v(\lambda v) = \lambda v$.

(a) $\Pi_v(\Pi_v\binom{1}{3}) = \binom{2}{1}$.

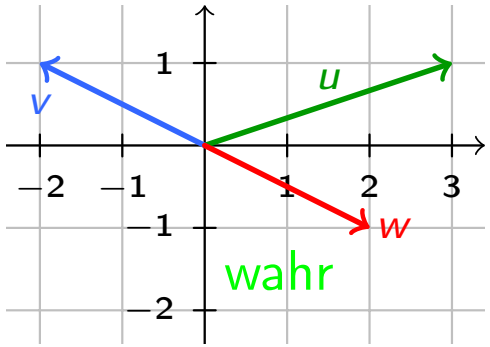
(b) $\Pi_v\binom{2}{6} = 2\Pi_v\binom{1}{3} = \binom{4}{2}$.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

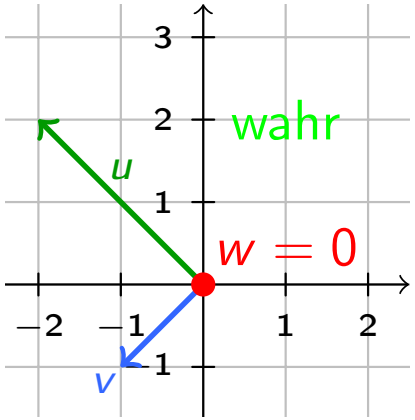
Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

3.2 Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils drei Vektoren u, v und w in $\mathbb{R}^2$. Weiter bezeichnet Π_v die orthogonale Projektion auf v. Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob $w = \Pi_v(u)$ gilt (wahr) oder nicht (falsch).

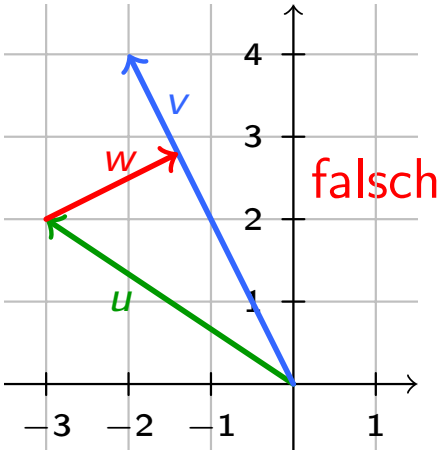
(a)



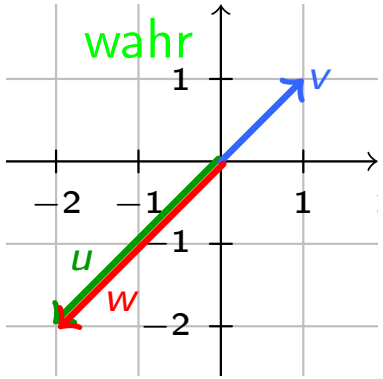
(b)



(c)



(d)



Antwort. Zerlegt man u in eine Komponente $u_{\parallel}$ parallel zu v und eine Komponente $u_{\perp}$ senkrecht zu v, so ist die Projektion von u auf v die Komponente $u_{\parallel}$.

4.1 Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) $v_1 \in \mathrm{im}(A)$. wahr

(b) $v_1 \in \ker(A)$. falsch

(c) $v_2 \in \mathrm{im}(A)$. wahr

(d) $v_2 \in \ker(A)$. wahr

Antwort. (a) $-v_1$ ist die zweite Spalte von A.

(b) $Av_1 \neq 0$ (siehe z. B. die erste Komponente).

(c) v_2 ist die dritte Spalte von A.

(d) $Av_2 = 0$.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

4.2 Betrachten Sie beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Es gilt $\dim(\mathrm{Im}(C)) < 3$. wahr

(b) Es gilt $\dim(\mathrm{Im}(A)) < 3$. wahr

(c) Es gilt $\dim(\ker(C)) > 0$. falsch

(d) Es gilt $\dim(\ker(A)) > 0$. wahr

Antwort. (a) Das Bild von C hat höchstens die Dimension 2 (C hat nur 2 Spalten).

(b) Das Bild von A (aufgespannt von den Spalten von A) hat höchstens die Dimension 2.

(c) Sind die Spalten von C linear unabhängig, liegt nur der Nullvektor im Kern.

(d) $Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösungen, denn der Rang von A ist höchstens 2.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

5.1 Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir diagonalisieren A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $A = TDT^{-1}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) D ist eine der folgenden Matrizen: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ oder $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. wahr

(b) Es ist $A^{2022} = TD^{2022}T^{-1}$. wahr

(c) Die Spaltenvektoren von T bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. wahr

(d) Die Spaltenvektoren von T sind orthogonal. falsch

Antwort. (a) $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = TD^nT^{-1}$.

(c) T ist regulär.

(d) EV von A sind $\binom{3}{1}$ und $\binom{-3}{1}$.

Aufgabe 1.1
Aufgabe 1.2
Aufgabe 2.1
Aufgabe 2.2
Aufgabe 3.1
Aufgabe 3.2
Aufgabe 4.1
Aufgabe 4.2
Aufgabe 5.1
Aufgabe 5.2

5.2 Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal. wahr

(b) Alle Eigenwerte von C sind reell. wahr

(c) C ist diagonalisierbar mithilfe einer orthogonalen Transformationsmatrix. wahr

(d) Es existiert eine Eigenbasis zu C. wahr

Antwort. C ist symmetrisch.